1 a) Generalisierte Koordinate: s = Lage der Perle auf der Stange (kann auch negativ sein, wenn Stange durch den Ursprung fortgesetzt wird). Kartesische Koordinaten:

$$x(s) = s \cos(\alpha) \quad y(s) = s \sin(\alpha)$$

Lagrange-Gleichung 2. Art (ohne Lagrange-Funktion) (siehe z.B. Fließbach) allgemein, für ein Teilchen der Masse m :

$$m \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = Q_k, \quad Q_k = \sum_{i=1}^3 F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

mit den generalisierten Koordinaten q_k und den gen. Kräften Q_k .

Für die Perle lautet die Gleichung dann

$$m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial s} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) = F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s} \quad (1)$$

Dafür brauchen wir:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos(\alpha), \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin(\alpha), \quad \ddot{x} = \ddot{s} \cos(\alpha), \quad \ddot{y} = \ddot{s} \sin(\alpha)$$

und $F_x = 0, F_y = -mg$.

Dieses einsetzen ergibt

$$\boxed{\ddot{s}(t) = -g \sin(\alpha)}$$

b) Die allgemeine Lösung ist natürlich billig: beschleunigte Bewegung in konstanter Kraft,

$$\boxed{s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2}$$

2 a) Zwangsbedingung: Der gegebene Neigungswinkel α schreibt für x und y das Verhältnis $\frac{y}{x} = \tan(\alpha)$ vor, das für alle Zeiten eingehalten werden muß. Dies wird umgeschrieben als

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \implies \boxed{g(x, y) = y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha) = 0}$$

Das Vorzeichen von $g(x, y)$ kann beliebig gewählt werden.

Lagrange-Gleichung 1. Art mit einer Zwangsbedingung (siehe z.B. Fließbach):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} = \lambda \text{grad} g$$

$$\text{Zwangskraft: } \mathbf{Z} = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} (y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{Externe Kraft: } \mathbf{F} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Langrange-Bewegungsgleichung 1. Art lautet damit

$$\boxed{m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}}$$

b) Eliminiere λ : Trick:

$$\frac{d^2}{dt^2}g(x(t), y(t)) = 0 \Rightarrow \ddot{y} \cos(\alpha) - \ddot{x} \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = 0$$

Mit Einsetzen der Lagrange-Gleichung und Ausmultiplizieren des Skalarproduktes folgt

$$0 = \sin^2(\alpha)\lambda + \cos^2(\alpha)\lambda - mg \cos(\alpha) \implies \boxed{\lambda = mg \cos(\alpha)}$$

Damit ist die Zwangskraft bestimmt. Wird λ jetzt wieder in die Lagrange-Gl. eingesetzt, erhält man eine Bewegungsgleichung für $x(t), y(t)$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ m\ddot{y} &= -mg + mg \cos^2(\alpha) \end{aligned} \implies \boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= -g \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \ddot{y} &= -g \sin^2(\alpha) \end{aligned}}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)t - \frac{1}{2}gt^2 \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}} \quad (2)$$

c) Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Zwangsbedingung:

$$0 = g(x, y) = [y(0) \cos(\alpha) - x(0) \sin(\alpha)] + [\dot{y}(0) \cos(\alpha) - \dot{x}(0) \sin(\alpha)]t$$

Die Terme $\sim t^2$ heben sich weg!

Um dies für alle t zu erfüllen, müssen die erste und zweite [...] unabhängig = 0 werden. Dies läßt sich offenbar bewerkstelligen, indem man die 4 Integrationskonstanten $x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)$ durch nur 2 Konstanten s_0, v_0 wie folgt ausdrückt:

$$x(0) = s_0 \cos(\alpha), \quad y(0) = s_0 \sin(\alpha), \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha), \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin(\alpha)$$

Einsetzen in (2) ergibt die allgemeine, mit der Zwangsbedingung kompatible Lösung:

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = (s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}} \quad (3)$$

d) Die Bahnkurve (3) ist offensichtlich eine eindimensionale, beschleunigte Bewegung auf einer um den Drehwinkel α rotierten Achse, i.e., der Stange. Die Position der Perle auf dieser Achse entspricht natürlich der Lösung aus Aufg. 1.

3 a) Der Neigungswinkel der Stange ist nun $\alpha = \alpha(t) = \omega t$.
Für die Lagrange-Gleichung 2. Art (1) brauchen wir:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos(\omega t) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin(\omega t) \quad \text{wie bisher}$$

und

$$\ddot{x} = (\ddot{s} - \omega^2 s) \cos(\omega t) - 2\omega \dot{s} \sin(\omega t)$$

$$\ddot{y} = (\ddot{s} - \omega^2 s) \sin(\omega t) + 2\omega \dot{s} \cos(\omega t)$$

Einsetzen in (1) liefert

$$\boxed{\ddot{s}(t) - \omega^2 s(t) = -g \sin(\omega t)}$$

b) Zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:
Exponentialansatz $s(t) = \exp(kt)$ liefert $k = \pm\omega$, also

$$s_h(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung müssen wir einen Ansatz raten; naheliegender ist $s_p(t) = C \sin(\omega t)$. Ableiten und Einsetzen gibt $-C\omega^2 - \omega^2 C = -g$, das heißt, der Ansatz funktioniert, und die partikuläre Lösung ist $C = g/(2\omega^2) \Rightarrow$

$$s_p(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\boxed{s(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)}$$

mit 2 Integrationskonstanten A, B .

c) Anfangsbedingungen: $s(0) = 1, \dot{s}(0) = 0$. Mit der allgemeinen Lösung $s(t)$ gibt das

$$A + B = 1 \quad , \quad A - B = -\frac{g}{2\omega^2}$$

und somit

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{g}{2\omega^2}\right) e^{\omega t} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{g}{2\omega^2}\right) e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)}$$

Für kleine Zeiten $\omega t \ll 1$: Taylorentwicklung bis $\sim (\omega t)^2$:

$$e^{\omega t} = 1 + \omega t + \frac{1}{2}(\omega t)^2$$

$$e^{-\omega t} = 1 - \omega t + \frac{1}{2}(\omega t)^2$$

$$\sin(\omega t) = \omega t$$

Einsetzen liefert

$$\omega t \ll 1 : s(t) \approx 1 + \frac{1}{2}(\omega t)^2$$