

1 Punkt A habe die Koordinaten (x, y) , Punkt B liegt bei (x', y') . Der Durchtrittspunkt C liegt bei $(\bar{x}, 0)$ auf der x -Achse. Wir betrachten die Konfiguration wie in der Skizze auf dem Übungsblatt, d.h., $y > 0, y' < 0; x < \bar{x} < x'$.

Die Laufzeit der Wellenfront von A nach B ist damit gegeben durch

$$T_{AB} = T_{AC} + T_{CB} = \frac{1}{c} \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2} + \frac{1}{c'} \sqrt{(x' - \bar{x})^2 + y'^2} \quad \text{mit} \quad c = \frac{c_0}{n}, \quad c' = \frac{c_0}{n'}$$

Den Weg bei festgehaltenen A und B zu variieren heißt, den Punkt C auf der x -Achse zu verschieben, also $\bar{x}$ zu verändern. Die Laufzeit T_{AB} ist extremal (und damit auch minimal, in Ansehung der Skizze), wenn $\frac{dT_{AB}}{d\bar{x}} = 0$. Also:

$$\frac{dT_{AB}}{d\bar{x}} = \frac{1}{c} \frac{(\bar{x} - x)}{\sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2}} + \frac{1}{c'} \frac{-(x' - \bar{x})}{\sqrt{(x' - \bar{x})^2 + y'^2}} = 0$$

Dies kann durch Einfallswinkel- und Brechungswinkel ausgedrückt werden,

$$\frac{(\bar{x} - x)}{\sqrt{(\bar{x} - x)^2 + y^2}} = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \frac{(x' - \bar{x})}{\sqrt{(x' - \bar{x})^2 + y'^2}} = \sin(\beta)$$

und es folgt schließlich

$$0 = \frac{\sin(\alpha)}{c} - \frac{\sin(\beta)}{c'} \implies \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c}{c'} = \frac{n'}{n}}$$

2 Lagrangefunktion und -gleichungen für die Auslenkungen der Massen aus der Ruhelage:

a) Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)$$

Potentielle Energie: Feder mit Federkonstanter D : $V = \frac{1}{2} D l^2$, l = Auslenkung aus der Ruhelage. Beitrag aller drei Federn zusammen ist potentielle Energie,

$$V = \frac{1}{2} D u_1^2 + \frac{1}{2} D u_2^2 + \frac{1}{2} C (u_2 - u_1)^2$$

Lagrangefunktion: $L = T - V$,

$$\boxed{L(u_1, \dot{u}_1; u_2, \dot{u}_2) = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - \frac{1}{2} D (u_1^2 + u_2^2) - \frac{1}{2} C (u_2 - u_1)^2}$$

b) Lagrangegleichungen allgemein:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{für alle generalisierten Koordinaten } q_i$$

Hier:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_1} &= -Du_1 + C(u_2 - u_1) & \frac{\partial L}{\partial u_2} &= -Du_2 - C(u_2 - u_1) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} &= \frac{d}{dt} m\dot{u}_1 = m\ddot{u}_1 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} &= m\ddot{u}_2 \end{aligned}$$

Die Lagrangegleichungen lauten also

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{D}{m}u_1 - \frac{C}{m}(u_1 - u_2) \\ \ddot{u}_2 &= -\frac{D}{m}u_2 - \frac{C}{m}(u_2 - u_1) \end{aligned}$$

Vergleich mit Newton: Identifizieren wir die Bewegungsachse mit der x -Achse, d.h., $u_1 \rightarrow x_1$ und $u_2 \rightarrow x_2$, dann sind dies offensichtlich die Newtonschen Gleichungen mit den rücktreibenden Federkräften, wie aus Theorie A bekannt (in diversen Variationen).

3 a) Generalisierte Koordinaten: Auslenkung φ und Längenänderung $u = l - l_0$. Zunächst werden wir l selbst als Koordinate benutzen. Die kartesischen Koordinaten seien festgelegt auf: Ursprung am Aufhängepunkt des Pendels, x -Achse nach links, y -Achse nach unten. Damit gilt für die Position der Masse m

$$\begin{aligned} x &= l \sin(\varphi) & \dot{x} &= \dot{l} \sin(\varphi) + l\dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ y &= l \cos(\varphi) & \dot{y} &= \dot{l} \cos(\varphi) - l\dot{\varphi} \sin(\varphi) \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

Für die kinetische Energie ergibt sich dann

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{2}m[\dot{l}^2 + (l\dot{\varphi})^2]$$

Die potentielle Energie ist

$$V = mgh + \frac{1}{2}D(l - l_0)^2$$

Für den Beitrag vom Schwerfeld liegt es nahe, den Bezugspunkt $h = 0$ bei $\varphi = 0$ und $l = l_0$ zu wählen, so daß $h = l_0 - l \cos(\varphi)$. (Achtung: $h = 0$ ist hier nicht die Gleichgewichtslage der Kugel in Ruhe, aber das macht nichts.) Die Lagrangefunktion ist damit

$$L(l, \dot{l}; \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m[\dot{l}^2 + (l\dot{\varphi})^2] + mgl \cos(\varphi) - \frac{1}{2}D(l - l_0)^2 - mgl_0$$

Die Konstante $-mgl_0$ wird im Folgenden ignoriert, denn sie fällt in den Bewegungsgleichungen raus. ((Alternativ kann man von vorneherein den Bezugspunkt der Schwereenergie $h = 0$ auf $l = 0$ legen, das ist zumindest formal möglich. Dann ist sofort $h = -l \cos(\varphi)$.)

b) Lagrangegleichungen: Für φ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml \dot{l} \dot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin(\varphi)$$

gibt die Bewegungsgleichung

$$l \ddot{\varphi} + g \sin(\varphi) + 2 \dot{l} \dot{\varphi} = 0$$

Für l :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m \dot{l} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m \ddot{l} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial l} = ml(\dot{\varphi})^2 - D(l - l_0) + mg \cos(\varphi)$$

gibt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{l} + \left[\frac{D}{m} - (\dot{\varphi})^2 \right] l = \frac{D}{m} l_0 + g \cos(\varphi)$$

c) Linearisieren der Bewegungsgleichungen:

Zunächst, mit $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$ und Einsetzen der Koordinate u , $l = u + l_0$, $\dot{l} = \dot{u}$,

$$(l_0 + u) \ddot{\varphi} + g\varphi + 2\dot{u} \dot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{D}{m} u - (\dot{\varphi})^2 (l_0 + u) = g$$

Dies sind zwei Oszillatoren, die über diverse nichtlineare Terme gekoppelt sind. Linearisierung: ignoriere alle Terme, die eine Potenz > 1 in den Variablen u , φ oder deren Ableitungen enthalten. Ergebnis:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0} \varphi = 0 \quad \ddot{u} + \frac{D}{m} u = g$$

In diesem System führt also die Linearisierung auf zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren. In anderen Fällen, z.B. dem Doppelpendel (zwei Fadenpendel untereinander gehängt) bleiben nach der Linearisierung zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren übrig, mit linearen Bewegungsgleichungen analog zu denen in Aufg. 1 b).