1 a) Transformation auf die generalisierten Koordinaten (= Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= l \sin(\theta) \cos(\varphi) & \dot{x} &= l \cos(\theta) \dot{\theta} \cos(\varphi) - l \sin(\theta) \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ y &= l \sin(\theta) \sin(\varphi) & \dot{y} &= l \cos(\theta) \dot{\theta} \sin(\varphi) + l \sin(\theta) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ z &= l \cos(\theta) & \dot{z} &= -l \sin(\theta) \dot{\theta} \end{aligned}$$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \implies$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ml^2 \{ (\dot{\theta})^2 [\cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)] + \\ &\quad + (\dot{\varphi})^2 [\sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)] + \\ &\quad + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} [0] \} \\ &= \frac{1}{2}ml^2 [(\dot{\theta})^2 + \sin^2(\theta) (\dot{\varphi})^2] \end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$V = mgh = -mgz = -mgl \cos(\theta)$$

für geeignet gewählten Bezugspunkt $h = 0$. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}; \varphi) = \frac{1}{2}ml^2 [(\dot{\theta})^2 + (\sin(\theta) \dot{\varphi})^2] + mgl \cos(\theta)$$

b) Lagrangegleichung allgemein: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ für jede generalisierte Koordinate q .

Hier: $q = \varphi$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\implies \boxed{\frac{d}{dt} L_z = 0 \quad \text{mit} \quad L_z := m(l \sin(\theta))^2 \dot{\varphi}}$$

Bedeutung: Es gibt offenbar eine Erhaltungsgröße (= Integral/Konstante der Bewegung). Dies ist L_z , der Drehimpuls in z -Richtung. L_z ist erhalten, weil die Lagrangefunktion nicht von φ abhängt (φ ist eine "zyklische" Koordinate), also symmetrisch bezüglich (= invariant unter) Drehungen um die z -Achse ist. Letzteres ist ja auch anschaulich klar.

(Achtung: die Erhaltungsgröße ist der Drehimpuls L_z , *nicht* etwa die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$!)

c) Lagrangegleichung für θ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = ml^2 \sin(\theta) \cos(\theta) (\dot{\varphi})^2 - mgl \sin(\theta)$$

Die Bewegungsgleichung ist damit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + (\dot{\varphi})^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Wenn wir jetzt $\dot{\varphi}$ durch L_z ersetzen, erhalten wir eine (nichtlineare) Bewegungsgleichung alleine für $\theta(t)$, denn L_z ist ja zeitlich konstant. Einsetzen von $\dot{\varphi} = L_z / (ml^2 \sin^2(\theta))$ ergibt also

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{L_z^2 \cos(\theta)}{m^2 l^4 \sin^3(\theta)}$$

Für kleine Auslenkungen θ entwickelt man wie üblich $\sin(\theta) \approx \theta$ und $\cos(\theta) \approx 1 \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = f(\theta), \quad f(\theta) = -\frac{g}{l} \theta + \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \theta^3}$$

d) Diese Bewegungsgleichung ist natürlich immer noch nicht ohne weiteres lösbar. Offenbar setzt sich die generalisierte "Kraft" $f(\theta)$ aus zwei gegensätzlichen Anteilen zusammen: die rücktreibende Kraft $-\frac{g}{l}\theta$ des harmonischen Pendels und die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft. Für $\dot{\theta} = 0$ ergibt sich damit eine neue Ruhelage $\theta_0 > 0$, die durch L_z bestimmt wird, was wiederum durch Anfangsbedingungen vorgegeben wird. Ruhelage:

$$f(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \left(\frac{L_z^2}{m^2 g l^3} \right)^{1/4}$$

Die Näherung besteht nun darin, für kleine Auslenkungen um diese Ruhelage zu entwickeln: Taylor:

$$f(\theta) \approx \underbrace{f(\theta_0)}_{=0} + f'(\theta_0) (\theta - \theta_0), \quad f'(\theta_0) = -\frac{g}{l} - 3 \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \theta_0^4} = -4 \frac{g}{l}$$

Einsetzen von $f(\theta)$ liefert die genäherte Bewegungsgleichung für $\theta(t)$,

$$\ddot{\theta}(t) + 4 \frac{g}{l} [\theta(t) - \theta_0] = 0$$

also ein harmonisches Pendel (Oszillator) mit verschobener Ruhelage θ_0 und erhöhter Eigenfrequenz $\omega_0 = 2\sqrt{g/l}$. Dieser Pendelbewegung in θ -Richtung ist eine Kreisbewegung in der x - y -Ebene überlagert. Diese ist allerdings nicht gleichförmig, da (wie gesagt) $\dot{\varphi}$ nicht konstant ist (sondern L_z): $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\theta) \approx \frac{L_z}{ml^2 \theta^2}$.

2 a) Lagrangefunktion: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + mgx$

b) Wirkung:

$$S[u(t)] = \int_0^{t_b} \left[\frac{1}{2} m (\dot{u})^2 + mgu \right] dt$$

Für die “virtuelle” Bahn $u(t)$ soll der Ansatz

$$u(t) = \alpha t + \beta t^2 \Rightarrow \dot{u} = \alpha + 2\beta t$$

eingesetzt werden. Für die Lagrangefunktion gibt das

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}) = \mathcal{L}(\alpha, \beta; t) = \frac{1}{2} m \left[(\alpha + 2\beta t)^2 + 2g(\alpha t + \beta t^2) \right] = \frac{1}{2} m \left[\alpha^2 + 2\alpha(g + 2\beta)t + 2\beta(g + 2\beta)t^2 \right]$$

Die Wirkung ist damit

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} m \left[\alpha^2 t_b + \alpha(g + 2\beta)t_b^2 + \frac{2}{3}\beta(g + 2\beta)t_b^3 \right]$$

c) Randbedingungen: $u(0) = 0$ ist offenbar im Ansatz schon eingebaut, und $u(t_b) = (\alpha t_b + \beta t_b^2) = x_b$ legt eine der Konstanten (= Variationsparameter) α, β als Funktion der anderen fest:

$$\alpha = \frac{x_b}{t_b} - \beta t_b$$

Um die Wirkung zu extremalisieren, kann man entweder α in S ersetzen, $S(\alpha, \beta) \rightarrow S(\beta)$ und dann $\frac{dS(\beta)}{d\beta} = 0$ bilden. Oder man berechnet

$$\frac{dS(\beta)}{d\beta} = \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Für letztere Strategie brauchen wir

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = m \left[\alpha t_b^2 + \frac{1}{3}(g + 4\beta)t_b^3 \right], \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = m \left[\alpha t_b + \frac{1}{2}(g + 2\beta)t_b^2 \right], \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = -t_b$$

Damit ergibt sich

$$0 = \frac{dS(\beta)}{d\beta} = \frac{m}{3} t_b^3 \left[(g + 4\beta) - \frac{3}{2}(g + 2\beta) \right] \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}g$$

Mit der Randbedingung von oben folgt daraus

$$\alpha = \frac{x_b}{t_b} - \frac{1}{2}gt_b$$

Mit den so bestimmten Variationsparametern geht die “virtuelle” Bahn $u(t)$ in die physikalische Bahn $x(t)$ über, die also lautet

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2, \quad v_0 = \alpha$$

Man kann jetzt leicht nachtesten, daß dies die übliche Newtongleichung $m\ddot{x} = mg$ löst und die Randbedingungen erfüllt.