1 **a)** Der einzige Freiheitsgrad des Systems ist offenbar die Position der Kugel auf der Stange. Als generalisierte Koordinate bietet sich der Abstand r vom Ursprung an, oder aber die Höhe z der Kugel über der Erdoberfläche (x-y-Ebene). Im Folgenden wird r benutzt, weiter unten wird alles mit z als Koordinate wiederholt.

Umrechnen der Koordinaten mit α =const., $\varphi = \omega\, t$, $r = r(t)$:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\alpha)\cos(\varphi) & \qquad & \dot{x} &= \cos(\alpha)[\dot{r}\,\cos(\varphi) - r\omega\,\sin(\varphi)] \\ y &= r\cos(\alpha)\sin(\varphi) & \Longrightarrow \qquad & \dot{y} &= \cos(\alpha)[\dot{r}\,\sin(\varphi) + r\omega\,\cos(\varphi)] \\ z &= r\sin(\alpha) & & \dot{z} &= \sin(\alpha)\,\dot{r} \end{aligned}$$

Mit $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ und der potentiellen Energie $V = mgh = mgz = mg\sin(\alpha)\,r$ ergibt sich die Lagrangefunktion

$$\boxed{\mathcal{L}(r,\dot{r}) = \frac{1}{2}m\left[(\dot{r})^2 + \cos(\alpha)^2\omega^2\,r^2 - 2g\sin(\alpha)\,r\right]}$$

Die Lagrangegleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

führt auf die (inhomogene) Bewegungsgleichung

$$\boxed{\ddot{r} - k^2\,r = -g\sin(\alpha) \quad , \quad k^2 = \omega^2\cos^2(\alpha)}$$

Dies kann gelöst werden, indem man die DGL als

$$\ddot{r} - k^2(r - \hat{r}) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \ddot{\bar{r}} - k^2\bar{r} = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{r} = r - \hat{r} \;\; , \quad \hat{r} = \frac{g\sin(\alpha)}{k^2} = \frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}$$

schreibt. Diese homogene DGL wird per Exponentialansatz gelöst:

$$\bar{r}(t) = e^{\lambda t} \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 - k^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = \pm k \quad\Rightarrow\quad \bar{r}(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung lautet damit

$$\boxed{r(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt} + \frac{g\sin(\alpha)}{k^2}}$$

Alternativ kann man zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für $r(t)$ per Exponentialansatz bestimmen, $r_h(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}$, dann eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung per Ansatz $r_p(t)$ =const. $\Rightarrow$ $r_p(t) = \hat{r}$ und beides addieren, $r(t) = r_h(t) + r_p(t)$.

b) Anfangsbedingungen: $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$. Einsetzen der allgemeinen Lösung führt auf die Bedigungen

$$r_0 = (A + B) + \hat{r} \quad \text{und} \quad 0 = k(A - B)$$

also auf $A = B$ und $r_0 = 2A + \hat{r}$ bzw. $A = \frac{1}{2}(r_0 - \hat{r})$. Die Bahn der Kugel ist also

$$r(t) = A(e^{kt} + e^{-kt}) + \hat{r} = 2A\cosh(kt) + \hat{r} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{r(t) = (r_0 - \hat{r})\cosh(k\,t) + \hat{r} \;\;, \quad \hat{r} = \frac{g}{k^2}\sin(\alpha) \;\;, \quad k = \omega\,\cos(\alpha)\, > 0}$$

Diskussion: Wird die Schwerkraft ignoriert, $g = 0$, ist $\hat{r} = 0$ und damit $r(t) = r_0 \cosh(kt)$. Der $\cosh(kt)$ nimmt mit $|t|$ zu, d.h., für $r_0 > 0$ rutscht die Kugel nach oben weg, für $r_0 < 0$ nach unten, wenn man sich die Stange zu negativen z fortgesetzt denkt. Dies kommt von der linearen, *weg*treibenden Zentrifugalkraft $+k^2\,r$ in der Bewegungsgleichung, die nur bei $r = 0$ verschwindet. Für große Zeiten $|t| \to \infty$ ist die Bahn exponentiell, mit $\cosh(kt) \approx \frac{1}{2}\exp(|k\,t|)$.

Mit Schwerkraft kommt eine konstante Kraft hinzu, die lediglich den Nullpunkt der Gesamtkraft von $r = 0$ nach $r = \hat{r}$ verschiebt.

Für den Fall $\omega \to 0 \;\Rightarrow\; k \to 0$, oder den Fall $t \to 0$ bei beliebigem k, muß für kleine $k\,t$ entwickelt werden. Mit $\cosh(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$ (z.B. Bronstein) und Einsetzen von $\hat{r}$ ergibt sich

$$r(t) \approx r_0 + \frac{1}{2}(r_0 k^2 - g\sin(\alpha))\,t^2$$

Für kleine Zeiten $|t| \to 0$ wirken demnach Zentrifugal- und Schwerkraft gleich (aber natürlich entgegengesetzt). Für den Fall $k \to 0$ erhält man wie erwartet $r(t) = r_0 - \frac{1}{2}g\sin(\alpha)\,t^2$.

Zum Vergleich alles nochmal mit z als generalisierte Koordinate:

a)

$$\begin{aligned}
x &= \frac{z}{\tan(\alpha)}\cos(\varphi) & \qquad & \dot{x} &= \frac{1}{\tan(\alpha)}\left[\dot{z}\cos(\varphi) - z\omega\sin(\varphi)\right] \\
y &= \frac{z}{\tan(\alpha)}\sin(\varphi) & \Longrightarrow \qquad & \dot{y} &= \frac{1}{\tan(\alpha)}\left[\dot{z}\sin(\varphi) + z\omega\cos(\varphi)\right] \\
z &= z & & \dot{z} &= \dot{z}
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie wird damit

$$T = \frac{1}{2}m\left[((\dot{z})^2 + \omega^2\,z^2)\,/\,\tan(\alpha)^2 + (\dot{z})^2\right]$$

und die potentielle $V = mgh = mgz$. Die Lagrangefunktion:

$$\boxed{\mathcal{L}(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\left[\frac{(\dot{z})^2}{\sin^2(\alpha)} + \frac{\omega^2\,z^2}{\tan^2(\alpha)} - 2g\,z\right]}$$

Dies ist im Prinzip dasselbe wie oben, mit anderen geometrischen, α-abhängigen Vorfaktoren. Die Lagrangegleichung liefert dann

$$\ddot{z} = \cos^2(\alpha)\omega^2 z - \frac{g}{m}\sin^2(\alpha) \ ,$$

was sich wie oben schreiben läßt als

$$\boxed{\ddot{z} - p^2(z - \hat{z}) = 0 \quad \text{mit} \quad p^2 = \cos^2(\alpha)\omega^2 \ , \quad \hat{z} = \frac{g}{m}\frac{\sin^2(\alpha)}{p^2} = \frac{g}{m\omega^2}\tan^2(\alpha)}$$

Entsprechend lautet die allgemeine Lösung

$$\boxed{z(t) = Ae^{p\,t} + Be^{-p\,t} + \hat{z}}$$

b) Anfangsbedingungen: $r(0) = r_0 \ \Rightarrow \ z(0) = z_0 = r_0\sin(\alpha)$ und $\dot{r}(0) = 0 \ \Rightarrow \ \dot{z}(0) = 0$. Für die dazugehörige Bahn ergibt sich

$$\boxed{z(t) = (z_0 - \hat{z})\cosh(p\,t) + \hat{z} \ , \quad \hat{z} = \frac{g}{m\omega^2}\tan^2(\alpha) \ , \quad p = \omega\cos(\alpha) > 0}$$

---

2 **a)** Pendel schwingt in Ebene, diese sei x-y-Ebene; dann ist $x = l\sin(\varphi)\,, y = l\cos(\varphi)$, und die kinetische Energie lautet (wie üblich) $T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$. Die potentielle Energie ist $V(\varphi) = mgh = -mgl\cos(\varphi)$. Damit

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi}) &= T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 - V(\varphi) \\ E(\varphi,\dot{\varphi}) &= T + V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 + V(\varphi) \end{aligned}}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = ml^2\,\dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} + \frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \left[ml^2\,\ddot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi}\right]\dot{\varphi}$$

Mit der Lagrangegleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad ml^2\,\ddot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

folgt sofort $\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0}$.

b) Da die Gesamtenergie erhalten ist, können wir diese auf einen willkürlichen festen Wert $\bar{E}$ setzen und nach $\dot{\varphi}$ auflösen:

$$\bar{E} = E(\varphi,\dot{\varphi}) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2(\bar{E} - V(\varphi))}{ml^2}}$$

Trennung der Veränderlichen und Integration beider Seiten in den Grenzen $0, \varphi_b$ bzw. $0, t_b$:

$$\mathrm{d}\varphi = \sqrt{\frac{2(\bar{E} - V(\varphi))}{ml^2}}\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{ml^2}{2(\bar{E} - V(\varphi))}}\,\mathrm{d}\varphi \quad \Longrightarrow \quad t_b = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int\limits_0^{\varphi_b} \frac{1}{\sqrt{\bar{E} - V(\varphi)}}\,\mathrm{d}\varphi$$

Für kleine Auslenkungen mit $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ wird das Potential

$$V(\varphi) \approx \frac{1}{2} mgl\,\varphi^2 - mgl$$

und wir müssen das Integral

$$t_b = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int\limits_0^{\varphi_b} \frac{1}{\sqrt{(\bar{E} + mgl) - \frac{1}{2}mgl\,\varphi^2}}\,\mathrm{d}\varphi$$

berechnen. Die Konstante mgl kann als Bezugsenergie in $\bar{E}$ absorbiert werden, $(\bar{E} + mgl) \to \bar{E}$ (d.h., wir messen $\bar{E}$ relativ zu $-mgl$; wir hätten auch schon am Anfang einen entsprechenden Bezugspunkt im Potential wählen können). Das Integral lautet dann

$$t_b = \sqrt{\frac{ml^2}{2\bar{E}}} \int\limits_0^{\varphi_b} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{mgl}{2\bar{E}}\,\varphi^2}}\,\mathrm{d}\varphi$$

Mit der Substitution $x = \sqrt{\frac{mgl}{2\bar{E}}}\,\varphi$ wird daraus

$$\omega_0\, t_b = \int_0^{\sqrt{\frac{mgl}{2\bar{E}}}\varphi_b} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\left(\sqrt{\frac{mgl}{2\bar{E}}}\,\varphi_b\right) \qquad \text{mit} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Da φ_b und t_b beliebig sind, gibt $\varphi_b(t_b)$ die gesuchte "Bahn" $\varphi(t)$ wieder. Auflösen der obigen Gleichung ergibt

$$\boxed{\varphi(t) = \sqrt{\frac{2\,E}{mgl}}\,\sin(\omega_0\, t)}$$

Für die (ebenfalls beliebige) Energie $\bar{E}$ wurde wieder E geschrieben.

c) Anfangsbedingungen: Die obige Lösung liefert

$$\boxed{\varphi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{2E}{mgl}}\omega_0 = \sqrt{\frac{2E}{ml^2}}}$$

In der Rechnung: Die Anfangsauslenkung $\varphi(0) = 0$ wurde in der Rechnung explizit eingebaut, als untere Integralgrenze. Bei gegebenem $\varphi(0)$ ist die (zeitlich konstante) Energie E durch die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(0)$ bestimmt. Umgekehrt steckt also die zweite Anfangsbedingung in der gewählten Energie E.