

Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie B

1 Symmetrien und Koordinatentransformationen im Zweikörper-System.

Zwei Punktteilchen der Massen m_1 und m_2 befinden sich bei $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ im dreidimensionalen Raum. Die Teilchen unterliegen einer Wechselwirkung (potentielle Energie), die nur vom Abstand abhängt, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

a) Geben Sie zunächst die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1; \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ an.

Transformieren Sie die Lagrangefunktion auf Relativ- ($\mathbf{r}$) und Schwerpunkt- ($\mathbf{R}$) koordinaten über den Ansatz $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{r} + b\mathbf{R}$, $\mathbf{r}_2 = c\mathbf{r} + d\mathbf{R}$. Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c, d so, daß $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ ist und $\mathcal{L}$ in zwei unabhängige Teile $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{rel}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \mathcal{L}_{SP}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$ zerfällt.

Hinweis: Am Ende kann $b = 1$ gesetzt werden. Warum?

Zeigen Sie, daß auch der Drehimpuls $\mathbf{L} = m_1(\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2(\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2)$ in zwei Anteile $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{rel} + \mathbf{L}_{SP}$ zerfällt, desgleichen die Energie $E = E_{rel} + E_{SP}$.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktbewegung $\mathbf{R}(t)$ und deren allgemeine Lösung. Welche Koordinaten sind zyklisch, welche Erhaltungsgrößen folgen daraus? Welche Symmetrie (Homogenität) steht dahinter?

c) Begründen (oder beweisen) Sie:

Es darf angenommen werden, daß die Relativbewegung $\mathbf{r}(t)$ in der x - y -Ebene verläuft.

Hinweis: Erhaltung von $\mathbf{L}_{rel}$.

d) Transformieren Sie nun $\mathcal{L}_{rel}$ auf Polarkoordinaten $r(t), \varphi(t)$ in der x - y -Ebene.

Welche Koordinate ist zyklisch, welche Erhaltungsgröße und Symmetrie korrespondiert dazu?

Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $r(t)$ (hängt nicht von $\varphi, \dot{\varphi}$ ab).

e) Die Radialbewegung $r(t)$ kann als Bahn eines Teilchens in einer Dimension aufgefaßt werden, das sich in einem effektiven Potential $V^{eff}(r)$ bewegt.

Bestimmen und skizzieren Sie $V^{eff}(r)$ für die Fälle: Die Körper wechselwirken über die Gravitation, die Körper sind über eine Feder verbunden.

Welche Bahnformen der Relativbewegung $\mathbf{r}(t)$ sind demnach prinzipiell möglich?