1 a) Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1; \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{r}}_2)^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

Ansatz für eine lineare Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= a\mathbf{r} + b\mathbf{R} & \dot{\mathbf{r}}_1 &= a\dot{\mathbf{r}} + b\dot{\mathbf{R}} \\ \mathbf{r}_2 &= c\mathbf{r} + d\mathbf{R} & \dot{\mathbf{r}}_2 &= c\dot{\mathbf{r}} + d\dot{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

Damit $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ nur noch von *einer* Variablen abhängt, nämlich $|\mathbf{r}|$, wird verlangt, daß $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ gilt. Also:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (a - c)\mathbf{r} + (b - d)\mathbf{R} \quad \Longrightarrow \quad a - c = 1 \quad \text{und} \quad b - d = 0$$

Außerdem soll die kinetische Energie in zwei ungekoppelte Terme zerfallen (falls das überhaupt möglich ist). Dazu:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(a\dot{\mathbf{r}} + b\dot{\mathbf{R}})^2 + \frac{1}{2}m_2(c\dot{\mathbf{r}} + d\dot{\mathbf{R}})^2 \\ &= \frac{1}{2}[(m_1a^2 + m_2c^2)\dot{\mathbf{r}}^2 + (m_1b^2 + m_2d^2)\dot{\mathbf{R}}^2 + 2(m_1ab + m_2cd)\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{R}}] \end{aligned}$$

Damit die gemischten Terme $\sim \dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{R}}$ verschwinden, muß $m_1a + m_2c = 0$ gesetzt werden (mit $b = d$ von oben). Mit $a = 1 + c$ folgt daraus

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Die Transformation lautet also

$$\boxed{\mathbf{r}_1 = b\mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 = b\mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}} \quad (1)$$

Die verbliebene Konstante b bestimmt offenbar lediglich den Längenmaßstab von $\mathbf{R}$ und kann beliebig festgelegt werden. Am einfachsten ist $b = 1$. Die Umkehrtransformation folgt durch Auflösen von (1) nach $\mathbf{r}$ und $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$\mathbf{R}$ ist also gerade die Position des Schwerpunktes.

Einsetzen von a und c sowie $b = d = 1$ in T ergibt die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{2}M (\dot{\mathbf{R}})^2 - U(|\mathbf{r}|) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2$$

In den neuen Koordinaten (1) zerfällt auch der Gesamt-Drehimpuls des Zweikörper-Systems in einen Relativ- und einen Schwerpunktanteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = m_1(\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2(\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) &= m_1 \left[\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{R} \right) \times \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} \right) \right] + \\ & m_2 \left[\left(\frac{-m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{R} \right) \times \left(\frac{-m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} \right) \right] \end{aligned}$$

Die gemischten Terme $\sim (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{R}})$ etc. heben sich weg, und es folgt

$$\mathbf{L} = \mu (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + M (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})$$

Die Energie zerfällt ganz analog zur Lagrangefunktion: $E = T + V$,

$$E = \frac{1}{2}\mu (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{2}M (\dot{\mathbf{R}})^2 + U(|\mathbf{r}|)$$

b) Für $\mathbf{R}(t)$ braucht nur der SP-Anteil der Lagrangefunktion betrachtet zu werden, nämlich

$$\mathcal{L}_{SP} = \frac{1}{2}M (\dot{\mathbf{R}})^2$$

Die Lagrangegleichung liefert daraus die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}$$

Die allgemeine Lösung ist natürlich eine gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes,

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t$$

In $\mathcal{L}_{SP}$ sind drei Koordinaten zyklisch, nämlich die drei Raumkomponenten R_x, R_y, R_z des Schwerpunktes $\mathbf{R}$. Dies spiegelt die Homogenität des Raumes wieder, d.h., das *gesamte* System aus 2 Teilchen kann in allen drei Raumrichtungen verschoben werden, ohne daß sich $\mathcal{L}$ oder die Energie E ändern (= Translationsinvarianz von $\mathcal{L}, E$). Entsprechend gibt es drei Erhaltungsgrößen, die drei Komponenten des Schwerpunktimpulses $\mathbf{P}$.

c) Für die Relativbewegung $\mathbf{r}$ ist im Folgenden die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}\mu (\dot{\mathbf{r}})^2 - U(|\mathbf{r}|) \tag{2}$$

zuständig.

Es darf angenommen werden, daß die Relativbewegung in der x - y -Ebene verläuft, weil der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{rel}$ erhalten, also zeitlich konstant ist:

$$\mathbf{L} = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \Rightarrow \mathbf{r}(t) \perp \mathbf{L}(t) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{L} = 0 \Rightarrow \mathbf{r}(t) \perp \mathbf{L} \quad \text{für alle Zeiten } t$$

$\mathbf{r}$ befindet sich also für alle t in der Ebene senkrecht zu $\mathbf{L}$, die ohne weiteres als x - y -Ebene gewählt werden kann. Anders gesagt, man wählt die Richtung des Drehimpulses als Referenz- z -Achse, $\mathbf{L} = L \mathbf{e}_z$.

Die Drehimpulserhaltung folgt aus der Isotropie des Raumes, d.h., der Invarianz von $\mathcal{L}$ unter Drehungen des Systems im Raum (Vorlesung, Emmy Noether). Am einfachsten läßt sich das durch Nachrechnen prüfen, wie schon vom Zentralkraftproblem bekannt (Theorie A):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mu \underbrace{(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})}_{=0} + \mu(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}})$$

Aus der Lagrangefunktion (2) folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \ddot{x} = -\frac{\partial U(|\mathbf{r}|)}{\partial x} \quad \text{dto. für } y, z \Rightarrow \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } U(|\mathbf{r}|)$$

(= Newton-Gleichung). Die Relativbewegung ist die eines einzelnen Körpers in einem Zentralpotential $U(r)$, $r = |\mathbf{r}|$. Die Kraft

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U(r) \quad , \quad F_x = -\frac{\partial U(r)}{\partial x} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

ist demnach eine Zentralkraft. Damit ist

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} \sim (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0$$

d) Um die erwähnte Rotationssymmetrie auszunutzen, wird die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{rel}$ schließlich noch in Polarkoordinaten umgeschrieben. $\mathbf{r} = (x, y)$ ist ja auf die x - y -Ebene beschränkt, so daß

$$x = r \cos(\varphi) \quad y = r \sin(\varphi)$$

r und φ sind zeitabhängig, und $\mathcal{L}_{rel}$ wird zu

$$\mathcal{L}_{rel}(r, \dot{r}; \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu[(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2] - U(r)$$

Offensichtlich ist φ zyklisch (klar, Rotationsinvarianz), und die Erhaltungsgröße ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} L = 0 \quad \text{mit} \quad L = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

L ist der Drehimpuls in z -Richtung, $L = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x})$, also hier der Betrag des Drehimpulses.

Die Bewegungsgleichung für die Radialbewegung (= der Abstand der Teilchen) $r(t)$ lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{rel}}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \ddot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + \mu r (\dot{\varphi})^2$$

Wie üblich läßt sich daraus $\dot{\varphi}$ über die Erhaltungsgröße L eliminieren, $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$, also

$$\mu \ddot{r} = F_r \quad \text{mit} \quad F_r = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

e) Das effektive Potential $V^{eff}(r)$ muß die (generalisierte) Kraft F_r durch Gradientenbildung reproduzieren, also

$$F_r = -\frac{\partial V^{eff}(r)}{\partial r} \quad \Leftrightarrow \quad V^{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Bemerkung: Bei der Bestimmung von $V^{eff}(r)$ sind wir davon ausgegangen, daß L in der Bewegungsgleichung für $r(t)$ eine konstante Zahl ist. L ist ja eine Konstante der Bewegung, kann also für gegebene Randbedingungen in der Tat als Konstante betrachtet werden. Entsprechend ist V^{eff} so definiert, daß bei der Gradientenbildung nur die explizite Abhängigkeit von r beachtet werden muß, um die richtige Kraft F_r wieder zu erhalten. Diese Definition von V^{eff} ist natürlich willkürlich, aber zweckmäßig, um die Analogie zu einem echten eindimensionalen Problem herzustellen und zu veranschaulichen.

Es ist daher Vorsicht geboten, wenn man $\dot{\varphi}$ schon in der Lagrangefunktion durch L ersetzt: es sieht zunächst so aus, als ob man ein effektives Potential mit anderem Vorzeichen vor dem Zentrifugal-Anteil $\sim L^2$ ablesen könnte (was natürlich physikalisch Unsinn wäre!!). Bildet man aber $\partial \mathcal{L} / \partial r$ unter Berücksichtigung von $L = L(r) = \mu r^2 \dot{\varphi}$, so ergibt sich (trivialerweise) die korrekte Bewegungsgleichung (mit wegtreibender Zentrifugalkraft).

Konsistenterweise läßt sich V^{eff} auch in der Relativ-Energie wiederfinden, indem man dort $\dot{\varphi}$ eliminiert:

$$E_{rel} = \frac{1}{2} \mu (\dot{\mathbf{r}})^2 + U(|\mathbf{r}|) = \frac{1}{2} \mu [(\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\varphi})^2] + U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r})^2 + \left\{ U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \right\}$$

Beispiele:

Gravitation: $U(r) = -\gamma/r$, $\gamma = Gm_1 m_2$, also

$$V^{eff}(r)|_{grav} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Skizze überlassen wir dem geneigten Leser.

$V^{eff}(r)$ hat ein Minimum, wo sich Gravitationskraft und Zentrifugalkraft gerade zu 0 ausgleichen, divergiert für $r \rightarrow 0$ und geht $\rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Ist die Energie E_{rel} positiv (d.h., die kin. Energie im Unendlichen endlich), dann ist die Bahn offen (Komet und Sonne), ist $E_{rel} < 0$, verläuft die Relativbewegung auf einer geschlossenen Bahn (Planet und Sonne).

Feder/Oszillator: $U(r) = \frac{1}{2}Dr^2$, also

$$V^{eff}(r)|_{osz} = \frac{1}{2}Dr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Im Prinzip wie oben, allerdings divergiert $V^{eff}(r) \rightarrow \infty$ auch für $r \rightarrow \infty$, d.h., offene Bahnen sind nicht möglich.

Genauere Diskussion der Bahnformen siehe z.B. Fließbach.