1 a) Lagrangefunktion aus Musterlösung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - \frac{1}{2}D(u_1^2 + u_2^2) - \frac{1}{2}C(u_2 - u_1)^2 \equiv \frac{1}{2}m(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - V(u_1, u_2)$$

Kanonische (= verallgemeinerte, generalisierte, konjugierte?) Impulse:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = m\dot{u}_i$$

Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H}(u_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{u}_i - \mathcal{L} = m(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - \mathcal{L} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(u_1, u_2)$$

Die Energie $E = T + V$ ist hier mit der Hamiltonfunktion identisch.

b) Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[(\dot{u})^2 + l^2(\dot{\varphi})^2] - V(u, \varphi) \quad , \quad l = l_0 + u$$

Impulse:

$$p_u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = m\dot{u} \quad , \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}$$

Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H}(u, p_u; \varphi, p_\varphi) = p_u \dot{u} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{p_u^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + V(u, \varphi)$$

Die Energie $E = T + V$ ist auch hier gleich $\mathcal{H}$.

c) Lagrange:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m[(\dot{r})^2 + \cos^2(\alpha)\omega^2 r^2] \quad , \quad V(r) = mg \sin(\alpha) r \quad , \quad \mathcal{L} = T - V$$

Impuls:

$$p = p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

Hamilton:

$$\mathcal{H}(r, p) = p \dot{r} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2} \cos^2(\alpha)\omega^2 r^2 + V(r)$$

Die Energie dagegen ist

$$E = T + V(r) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \cos^2(\alpha) \omega^2 r^2 + V(r)$$

Hier ist also $\mathcal{H} \neq E$!

2 a) Die Lagrangefunktion besteht hier nur aus kinetischer Energie,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{\mathbf{r}})^2 = \frac{1}{2} \mu [(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2] \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Daraus folgt der Drehimpuls als Erhaltungsgröße, da φ zyklisch ist,

$$\frac{d}{dt} L = 0 \quad L = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (2)$$

und die Radial-Bewegungsgleichung (für später),

$$\mu \ddot{r} = \mu r (\dot{\varphi})^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \quad (3)$$

mit $\dot{\varphi}$ durch L ersetzt.

Ohne Potential ist die Energie gleich der Lagrangefunktion,

$$E = \frac{1}{2} \mu [(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2] = \frac{1}{2} \mu (\dot{r})^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} \equiv \frac{1}{2} \mu (\dot{r})^2 + V^{eff}(r) \quad (4)$$

Anstatt die Bewegungsgleichung (3) zu lösen, kann man die zeitliche Konstanz von E und L ausnutzen, E nach $\dot{r}$ auflösen und integrieren:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V^{eff}(r))} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{\sqrt{(E - V^{eff}(r'))}}}$$

t_0 und r_0 sind Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Die Anfangsbedingungen bestimmen auch E und L . Im Folgenden lassen wir E, L, r_0 beliebig, setzen aber der Einfachheit halber $t_0 = 0$.

Jetzt zur Aufgabe:

Das effektive Potential besteht hier nur aus der "Zentrifugalenergie" (ist also Teil der kinetischen Energie),

$$V^{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Dies einsetzen und erweitern des Integranden mit r' liefert

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \int_{r_0}^r dr' \frac{r'}{\sqrt{r'^2 - \frac{L^2}{2\mu E}}}$$

Mit der Substitution $u = r'^2 - \frac{L^2}{2\mu E}$ und $du = 2r' dr'$ gibt das

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \int_{u(r_0)}^{u(r)} du \frac{1}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\mu}{2E}} (\sqrt{u(r)} - \sqrt{u(r_0)})$$

Einsetzen von u und Auflösen nach $r = r(t)$ ergibt schließlich

$$\boxed{r(t) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2E}{\mu}} t + \sqrt{r_0^2 - \frac{L^2}{2\mu E}}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu E}} \quad (5)$$

Bem.: Physikalisch sinnvolle Parameter heißt, daß die Argumente der Wurzeln positiv sind.

b) Bewegungsgleichung haben wir schon, (3). Dafür brauchen wir

$$r = \sqrt{A^2 + B} \Rightarrow \dot{r} = \frac{1}{r} A \dot{A} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} A \dot{A} + \frac{1}{r} \dot{A} \ddot{A} = (\dot{A})^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{A^2}{r^3} \right]$$

mit $A = \left(\sqrt{\frac{2E}{\mu}} t + \sqrt{r_0^2 - \frac{L^2}{2\mu E}}\right)$, $B = \frac{L^2}{2\mu E}$.

$$\text{In (3)} \Rightarrow (\dot{A})^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{A^2}{r^3} \right] = \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \Rightarrow (\dot{A})^2 \frac{\mu^2}{L^2} [r^2 - A^2] = 1 \Rightarrow (\dot{A})^2 \frac{\mu^2}{L^2} B = 1$$

Einsetzen von B und $\dot{A} = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$ liefert das Gewünschte,

$$(\dot{A})^2 \frac{\mu^2}{L^2} B = \frac{2E}{\mu} \frac{\mu^2}{L^2} \frac{L^2}{2\mu E} = 1$$

(5) erfüllt also die radiale Bewegungsgleichung.

c) Die Bestimmung von $\varphi(t)$ geht genauso, mit der Erhaltung des Drehimpulses:

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow d\varphi = \frac{L}{\mu r^2} dt \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\mu} \int_{t_0}^t dt' \frac{1}{r(t')^2}$$

Darin setzen wir $r(t')$, (5), ein:

$$r(t')^2 = \left(\sqrt{\frac{2E}{\mu}} t' + \sqrt{r_0^2 - \frac{L^2}{2\mu E}}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu E} = \frac{L^2}{2\mu E} [1 + v^2]$$

mit $v = \frac{1}{L} \sqrt{2\mu E} \left(\sqrt{\frac{2E}{\mu}} t' + \sqrt{r_0^2 - \frac{L^2}{2\mu E}}\right)$.

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \frac{2E}{L} \int_{t_0}^t dt' \frac{1}{1 + v^2}$$

mit v als substituierte Integrationsvariable, $dv = \frac{2E}{L} dt'$

$$\Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv \frac{1}{1+v^2} = \arctan(v(t)) - \arctan(v(t_0))$$

Im Klartext, mit $t_0 = 0$ wie bisher,

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \arctan\left(\frac{2E}{L}t + \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}r_0^2 - 1}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}r_0^2 - 1}\right)} \quad (6)$$

d) Die Randbedingungen sind:

$$r(0) = r_0 \quad , \quad \dot{r}(0) = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

Der Reihe nach:

$r(0) = r_0$ ist schon eingebaut.

$\dot{r}(0) = 0$ legt die Energie fest: Aus **b)** folgt

$$\dot{r}(0) = \frac{1}{r_0} \sqrt{r_0^2 - B} \sqrt{\frac{2E}{\mu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0^2 = B = \frac{L^2}{2\mu E} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{L^2}{2\mu r_0^2}$$

E ist natürlich nicht anderes als die "Zentrifugalenergie" zur Zeit $t = 0$.

$\varphi(0)$ ist nicht bekannt, würde aber φ_0 festlegen. Wir setzen mal $\varphi_0 = 0$, was tatsächlich zu $\varphi(0) = 0$ korrespondiert.

$\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ legt den Drehimpuls fest:

$$L = L(0) = \mu r(0)^2 \dot{\varphi}(0) = \mu r_0^2 \omega_0$$

also

$$\boxed{L = \mu r_0^2 \omega_0 \quad , \quad E = \frac{1}{2} \mu r_0^2 \omega_0^2}$$

Damit ergibt sich $\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}r_0^2 - 1} = 0$, $\frac{2E}{L} = \omega_0$, und so aus (5) und (6)

$$\boxed{r(t) = r_0 \sqrt{\omega_0^2 t^2 + 1} \quad \varphi(t) = \arctan(\omega_0 t)} \quad (7)$$

Für große Zeiten erhält man daraus

$$t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad r(t) \rightarrow r_0 \omega_0 t \quad \varphi(t) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Die bisherige Rechnung (genauer: die Aufgabenstellung) ist zu einem gewissen Grad Verarschung,

denn es geht auch in zwei Zeilen: Wenn die Stange reißt, d.h., die Zwangskraft verschwindet, sind die Massen kräftefrei und bewegen sich gleichförmig. Nehmen wir an, daß sich die effektive Masse μ zur Zeit $t = 0$ auf der x -Achse befindet, im Abstand r_0 vom Ursprung (= Schwerpunkt), dann hat μ zur Zeit $t = 0$ eine Geschwindigkeit $v_0 = r_0\omega_0$, deren Vektor in Richtung der positiven y -Achse zeigt. Die gleichförmige Bewegung für $t > 0$ lautet also

$$x(t) = r_0 \quad , \quad y(t) = v_0 t = r_0\omega_0 t$$

Schreibt man das in Polarkoordinaten um, $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$, so ergibt sich (7):

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = r_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2} \quad , \quad \varphi(t) = \arctan(y/x) = \arctan(\omega_0 t)$$