

Übungsblatt Nr. 8 zur Theorie B

1 Gegeben ist ein System mit der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + Q \mathbf{A}(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}}$$

a) Zeigen Sie anhand der Bewegungsgleichung mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = (0, xB_0, 0)$, daß es sich um ein Teilchen in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ handelt.

Was erhält man für $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 = (-yB_0, 0, 0)$ und für $\mathbf{A} = \mathbf{A}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$?

b) Betrachten Sie nun ein beliebiges $\mathbf{A}$, und begründen Sie über das Wirkungsprinzip, daß $\mathbf{A}$ und $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \text{grad } \Phi(\mathbf{r})$ auf dieselbe Bewegungsgleichung führen.

Wie ist also das Ergebnis von a) zu verstehen? (Geben Sie Φ an.)

c) Bestimmen Sie (für beliebiges $\mathbf{A}$) den kanonischen Impuls $\mathbf{p}$ und die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$.

Bestimmen Sie die Energie des Teilchens im Magnetfeld (*Hinw.*: geleistete Arbeit), und vergleichen Sie mit $\mathcal{H}$.

d*) Verifizieren Sie, daß die Bewegungsgleichung für beliebiges $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ äquivalent zur Newton-Gleichung ist, mit der Kraft $\mathbf{F} = Q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$ mit $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$.

2 Man berechne die folgenden Poisson-Klammern für die Komponenten des Drehimpulses

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (L_x, L_y, L_z):$$

a) $\{L_i, x_k\}$, $\{L_i, p_k\}$, $\{L_i, L_k\}$ $i, k \in x, y, z$

b) Zeigen Sie für ein Teilchen im Zentralpotential, $V(\mathbf{r}) = U(|\mathbf{r}|)$, daß

$$\{\mathcal{H}, L_i\} = 0, \quad \{\mathcal{H}, |\mathbf{L}|^2\} = 0, \quad \{|\mathbf{L}|^2, L_i\} = 0$$

Hinweis: benutzen Sie die algebraischen Rechenregeln für Poisson-Klammern.

Welcher Satz involutorischer Observabler ergibt sich daraus?

c) $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ und $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ seien Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung). Zeigen Sie, daß auch $f_3 = \{f_1, f_2\}$ eine Erhaltungsgröße ist.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Fr., den 14.6.02 bzw. Di., den 18.6.02 —

*) : “Liebhaberaufgabe”