

1 a) Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + Q\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{2}m(\dot{x}_i)^2 + Q \sum_{i=x,y,z} A_i \dot{x}_i$$

Für die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} [m \dot{x}_i + Q A_i] = m \ddot{x}_i + Q \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \dot{x}_k \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = Q \sum_{k=x,y,z} \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}$$

Zusammen $\Rightarrow$

$$\boxed{m \ddot{x}_i = Q \sum_{k=x,y,z} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k} \quad (1)$$

Hier: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = (0, xB_0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= QB_0 \dot{y} \\ m \ddot{y} &= -QB_0 \dot{x} \\ m \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{m \ddot{\mathbf{r}} = QB_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (2)$$

Teilchen im Magnetfeld ?!

Newton: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_L$ mit der Lorentzkraft $\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_L = QB_0 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = QB_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{q.e.d}$$

Andere Wahl für $\mathbf{A}$:

Setze $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 = (-yB_0, 0, 0)$ in (1) ein; es kommt wieder (2) heraus. D.h., $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ korrespondieren zur selben Kraft $\mathbf{F}_L$, sprich Magnetfeld $\mathbf{B}$.

Dritte Möglichkeit:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -yB_0 \\ xB_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$$

Da die Bewegungsgleichung (1) linear in $\mathbf{A}$ ist, addieren sich die Kräfte, $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_L)$, und es folgt wiederum (2).

b) Wirkungsprinzip: Die Bahn $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens extremalisiert die Wirkung

$$S[\mathbf{r}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$$

bei festgehaltenen Endpunkten $\mathbf{r}(t_a) = \mathbf{r}_a$ und $\mathbf{r}(t_b) = \mathbf{r}_b$.

Hier: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + Q\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}$ mit dem Parameter $\mathbf{A}$.

Eichtransformation: $\mathbf{A} \rightarrow \widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \text{grad } \Phi(\mathbf{r})$, dann ändert sich die Lagrangefunktion in

$$\mathcal{L} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + Q\dot{\mathbf{r}} \text{grad } \Phi(\mathbf{r}) = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}(t))$$

denn

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}(t)) = \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \dot{x}_k = \dot{\mathbf{r}} \text{grad } \Phi$$

Die Wirkung geht damit über in

$$S \rightarrow \widehat{S} = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L} + \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}(t)) = S + \underbrace{\Phi(\mathbf{r}_b) - \Phi(\mathbf{r}_a)}_{= \text{const.}}$$

Die Eichtransformation führt auf eine additive Konstante, die nur von den festen Endpunkten der Bahn abhängt und daher das Ergebnis der Variation (= Lagrange-Gleichungen) nicht beeinflußt.

In **a)**: $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ unterscheiden sich um

$$\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} yB_0 \\ xB_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{grad } \Phi(x, y, z) \quad \text{mit} \quad \Phi = B_0 xy$$

Genauso: $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 - \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$, also in diesem Fall: $\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}B_0 xy$.

Die drei Vektorpotentiale in **a)** unterscheiden sich also nur um Eichtransformationen und sind physikalisch äquivalent.

c) Kanonischer Impuls:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + Q A_i \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}} + Q \mathbf{A}(\mathbf{r})}$$

Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=x,y,z} p_i \dot{x}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - Q \mathbf{A})^2}$$

Energie: Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2$.

Potentielle Energie: Die Lorentzkraft besitzt kein Potential. Die Energie hängt also von der Bahn des Teilchens ab und muß für jede Bahn (sprich Anfangsbedingung) neu bestimmt werden, durch Berechnung der geleisteten Arbeit.

Im Fall des Teilchens im Magnetfeld hat man allerdings Glück, die an der Lorentzkraft geleistete Arbeit ist stets null:

$$W_{ab} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}_L d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_L \dot{\mathbf{r}} dt = 0$$

weil $\mathbf{F}_L \dot{\mathbf{r}} = Q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})\dot{\mathbf{r}} = 0$. Damit ist die Energie immer durch die kinetische gegeben, $E = T = \mathcal{H}$, bestimmt durch den kinetischen Impuls $m\dot{\mathbf{r}}$.

d*) Wir gehen rückwärts vor: Newton-Gleichung nach Komponenten auflösen und hoffen, daß (1) rauskommt.

Newton:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_L, \quad \mathbf{F}_L = Q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Magnetfeld in Komponenten:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

Damit in die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = Q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}[\partial_x A_y - \partial_y A_x] - \dot{z}[\partial_z A_x - \partial_x A_z] \\ \dot{z}[\partial_y A_z - \partial_z A_y] - \dot{x}[\partial_x A_y - \partial_y A_x] \\ \dot{x}[\partial_z A_x - \partial_x A_z] - \dot{y}[\partial_y A_z - \partial_z A_y] \end{pmatrix}$$

In den hinteren [...] -Klammern die Reihenfolge der Summanden umtauschen und in jeder Zeile eine 0 addieren:

$$\mathbf{F}_L = Q \begin{pmatrix} \dot{y}[\partial_x A_y - \partial_y A_x] + \dot{z}[\partial_x A_z - \partial_z A_x] + \dot{x}[\partial_x A_x - \partial_x A_x] \\ \dot{z}[\partial_y A_z - \partial_z A_y] + \dot{x}[\partial_y A_x - \partial_x A_y] + \dot{y}[\partial_y A_y - \partial_y A_y] \\ \dot{x}[\partial_z A_x - \partial_x A_z] + \dot{y}[\partial_z A_y - \partial_y A_z] + \dot{z}[\partial_z A_z - \partial_z A_z] \end{pmatrix}$$

Dies läßt sich nun schreiben als

$$(\mathbf{F}_L)_i = Q \sum_{k=x,y,z} \dot{x}_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right)$$

Damit ist (1) für beliebiges $\mathbf{A}$ reproduziert.

2 a) (Kanonischer) Drehimpuls:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$

In Kurzform lauten die Komponenten

$$L_i = (x_j p_k - x_k p_j) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} (i, j, k) &= (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y) \\ &\equiv (x, z, y) \quad \text{und zyklisch} \end{aligned}$$

((Mit dem total antisymmetrischen Tensor ε (Theorie C!) sieht das dann so aus:

$$L_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j p_k .))$$

Poisson-Klammer:

$$\{A, B\} = \sum_{l=x,y,z} \left(\frac{\partial A}{\partial p_l} \frac{\partial B}{\partial x_l} - \frac{\partial A}{\partial x_l} \frac{\partial B}{\partial p_l} \right)$$

Damit zur Aufgabe:

$$\{L_i, x_k\} = \sum_{l=x,y,z} \left(\frac{\partial L_i}{\partial p_l} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \frac{\partial L_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial p_l} \right)$$

Die x_i und p_i sind die unabhängigen Variablen,

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_l} = 0 \quad , \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{k,l} \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

Damit folgt $\{L_i, x_k\} = \frac{\partial L_i}{\partial p_k}$, im einzelnen:

$$\begin{aligned} \{L_x, y\} &= \frac{\partial L_x}{\partial p_y} = -z & \{L_y, x\} &= \frac{\partial L_y}{\partial p_x} = z \\ \{L_y, z\} &= \frac{\partial L_y}{\partial p_z} = -x & \text{und} & \{L_z, y\} = \frac{\partial L_z}{\partial p_y} = x \\ \{L_z, x\} &= \frac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y & \{L_x, z\} &= \frac{\partial L_x}{\partial p_z} = y \end{aligned}$$

Außerdem gilt natürlich $\{L_x, x\} = \{L_y, y\} = \{L_z, z\} = 0$, und zusammengefaßt lautet das Ergebnis

$\begin{aligned} \{L_i, x_k\} &= -x_l & \text{mit} & (i, k, l) = (x, y, z) \quad \text{und zyklisch} \\ \{L_i, x_i\} &= 0 \\ \{L_k, x_i\} &= -\{L_i, x_k\} \end{aligned}$

((Dies läßt sich wieder mit dem ε -Tensor zusammenfassen, $\{L_i, x_k\} = - \sum_{l=x,y,z} \varepsilon_{ikl} x_l$.)

Ganz analog wird der “Kommutator” mit p berechnet:

$$\{L_i, p_k\} = \sum_{l=x,y,z} \left(\frac{\partial L_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_k}{\partial x_l} - \frac{\partial L_i}{\partial x_l} \frac{\partial p_k}{\partial p_l} \right) = - \frac{\partial L_i}{\partial x_k}$$

mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned}\{L_i, p_k\} &= -p_l & \text{mit} & \quad (i, k, l) = (x, y, z) \quad \text{und zyklisch} \\ \{L_i, p_i\} &= 0 \\ \{L_k, p_i\} &= -\{L_i, p_k\}\end{aligned}$$

$$((\text{In Kurzform: } \{L_i, p_k\} = - \sum_{l=x,y,z} \varepsilon_{ikl} p_l .))$$

Nun zur Berechnung von $\{L_i, L_k\}$. Trivialerweise gilt $\{L_i, L_i\} = 0$. Von den nichttrivialen Kombinationen betrachte mal

$$\{L_x, L_y\} = \sum_{l=x,y,z} \left(\underbrace{\frac{\partial L_x}{\partial p_l} \frac{\partial L_y}{\partial x_l}}_{l \neq z \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{\partial L_x}{\partial x_l} \frac{\partial L_y}{\partial p_l}}_{l \neq z \rightarrow 0} \right) = y p_x - p_y x = -L_z$$

Für die Kombinationen $(y, z), (z, x)$ geht das genauso, und mit Hilfe von $\{A, B\} = -\{B, A\}$ ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}\{L_i, L_k\} &= -L_l & \text{mit} & \quad (i, k, l) = (x, y, z) \quad \text{und zyklisch} \\ \{L_i, L_i\} &= 0 \\ \{L_k, L_i\} &= -\{L_i, L_k\}\end{aligned}$$

$$((\text{In Kurzform: } \{L_i, L_k\} = - \sum_{l=x,y,z} \varepsilon_{ikl} L_l .))$$

Dies läßt sich auch eleganter, aber länger, mit den algebraischen Regeln

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$$

$$\{AB, C\} = \{A, C\}B + A\{B, C\}$$

$$\{A, (B + C)\} = \{A, B\} + \{A, C\}$$

berechnen:

$$\begin{aligned}\{L_x, L_y\} &= \{L_x, (z p_x - x p_z)\} = \{L_x, z\}p_x + z\{L_x, p_x\} - \{L_x, x\}p_z - x\{L_x, p_z\} \\ &= \{L_x, z\}p_x - x\{L_x, p_z\} = y p_x - x p_y = -L_z\end{aligned}$$

etc.

b) Teilchen im Zentralpotential:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad , \quad V(\mathbf{r}) = U(|\mathbf{r}|)$$

Lassen wir zunächst $V(\mathbf{r})$ allgemein, dann gibt die erste Klammer der Aufgabe die Zeitentwicklung des Drehimpulses wieder,

$$\frac{d}{dt}L_i = \{\mathcal{H}, L_i\} = \frac{1}{2m}\{(\mathbf{p})^2, L_i\} + \{V(\mathbf{r}), L_i\}$$

Die erste Klammer (kinetische Energie) wird mit den Regeln von oben ausgewertet:

$$\begin{aligned}\{(\mathbf{p})^2, L_x\} &= \sum_{k=x,y,z} \{(p_k)^2, L_i\} = -2 \sum_{k=x,y,z} p_k \{L_x, p_k\} \\ &= -2[p_x \underbrace{\{L_x, p_x\}}_{=0} + p_y \underbrace{\{L_x, p_y\}}_{=-p_z} + p_z \underbrace{\{L_x, p_z\}}_{=+p_y}] = -2[p_z p_y - p_y p_z] = 0\end{aligned}$$

Die kinetische Energie erhält also den (kanonischen) Drehimpuls, $\{T, L_i\} = 0$, und die zeitliche Veränderung wird allein durch das Potential bestimmt. Die entsprechende Poisson-Klammer lautet

$$\{V(\mathbf{r}), L_x\} = -\{L_x, V\} = - \sum_{k=x,y,z} \left(\frac{\partial L_x}{\partial p_k} \frac{\partial V}{\partial x_k} - \frac{\partial L_x}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial p_k}}_{=0} \right)$$

Mit der Kraftkomponente F_k ,

$$\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x_k} = (\text{grad } V)_k = -F_k$$

ergibt sich

$$\{V(\mathbf{r}), L_x\} = \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial L_x}{\partial p_k} F_k = y F_z - z F_y$$

und analog $\{V, L_y\} = z F_x - x F_z$, $\{V, L_z\} = x F_y - y F_x$.

Also

$$\boxed{\{V(\mathbf{r}), L_i\} = x_k F_l - x_l F_k \quad \text{mit} \quad (i, k, l) = (x, y, z) \quad \text{und zyklisch} \quad \Leftrightarrow \{V(\mathbf{r}), \mathbf{L}\} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

In einem Zentralpotential ist das Drehmoment $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U(|\mathbf{r}|) = -\frac{dU(r)}{dr} \text{grad } r = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Hier ist also $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ (Zentralkraft), und damit verschwindet die Poisson-Klammer,

$$\boxed{\{\mathcal{H}, \mathbf{L}\} = \{U(|\mathbf{r}|), \mathbf{L}\} = -\frac{dU(r)}{dr}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0}$$

Die restlichen Poisson-Klammern der Aufgabe sind jetzt einfach:

$$\{\mathcal{H}, |\mathbf{L}|^2\} = \sum_{k=x,y,z} \{\mathcal{H}, (L_k)^2\} = 2 \sum_{k=x,y,z} L_k \underbrace{\{\mathcal{H}, L_k\}}_{=0} = 0$$

Und:

$$\{|\mathbf{L}|^2, L_x\} = 2L_x \underbrace{\{L_x, L_x\}}_{=0} + 2L_y \underbrace{\{L_y, L_x\}}_{=L_z} + 2L_z \underbrace{\{L_z, L_x\}}_{=-L_y} = 0 \quad \text{etc.}$$

Satz involutorischer Observabler:

$$\mathcal{H}, |\mathbf{L}|^2, L_i \quad \text{mit} \quad i = x \text{ oder } i = y \text{ oder } i = z$$

denn die paarweisen Poisson-Klammern aus $\mathcal{H}, |\mathbf{L}|^2, L_i$ sind zwar null für festes i , aber eben $\{L_i, L_k\} \neq 0$.

c) Hier nützt die Jacobi-Identität:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$

Damit ist

$$\frac{d}{dt} f_3(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \{\mathcal{H}, \{f_1, f_2\}\} = 0$$

denn

$$\{\mathcal{H}, \{f_1, f_2\}\} + \{f_2, \underbrace{\{\mathcal{H}, f_1\}}_{=0}\} + \{f_1, \underbrace{\{f_2, \mathcal{H}\}}_{=0}\} = 0$$