

Übungsblatt Nr. 10 zur Theorie B

- 1** Blatt 9, Aufgabe 1 b): Schreiben Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_k in Form eines Eigenwertproblems.

Geben Sie für den Fall $M = m$ die Eigenwerte und *normierten* Eigenvektoren an.

- 2** Transponieren einer Matrix: $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^T$, $(\mathbf{M}^T)_{ik} = M_{ki}$. Zeigen Sie, daß gilt

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \Rightarrow (\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad (\mathbf{ABCD})^T = \dots$$

- 3** Gegeben ist das Potential

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 D_{kl} u_k u_l \equiv \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{D} \mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$.
- b) Man betrachte die Matrix $\mathbf{U} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2)$, deren Spalten aus den Eigenvektoren bestehen. Zeigen Sie, daß $\mathbf{U}$ eine orthogonale Matrix ist: $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{1}$.
- c) Führen Sie neue Koordinaten q_1, q_2 ein über

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{q} \quad \leftrightarrow \quad u_i = \sum_{k=1}^2 U_{ik} q_k$$

Wie sieht das Potential in den neuen Koordinaten aus, $V(q_1, q_2)$?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß $V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot (\widetilde{\mathbf{D}} \mathbf{q})$ mit $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$.

- d) Wenn u_1, u_2 durch x, y gegeben sind, wie lauten dann $q_1(x, y)$ und $q_2(x, y)$? Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem und einige Äquipotentiallinien von V .

- e) Die kinetische Energie sei gegeben durch $T(\dot{u}_1, \dot{u}_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 m_k (\dot{u}_k)^2$

Geben Sie $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ als Funktion von $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{U}, \mathbf{U}^T$ an.

Es sei nun $m_k = m$: Geben Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen für die $q_i(t)$ an.