

1 Auf Blatt 9 ergab sich

$$\begin{pmatrix} k^2 & -kK & 0 \\ -kK & 2K^2 & -kK \\ 0 & -kK & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{C}{m}}, \quad K = \sqrt{\frac{C}{M}}$$

also eine Eigenwertgleichung der Form

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{a} = 0$$

Die Eigenwerte berechnen sich aus der Bedingung für nichttriviale Eigenvektoren, $\det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{1}) = 0$ zu

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = k^2, \quad \lambda_2 = k^2 + 2K^2$$

Die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$, sind die Lösungen des homogenen Gleichungssystems mit dem entsprechenden Eigenwert eingesetzt,

$$\mathbf{a}^0 = C^0 \begin{pmatrix} \frac{K}{k} \\ 1 \\ \frac{K}{k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^1 = C^1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = C^2 \begin{pmatrix} -\frac{k}{2K} \\ 1 \\ -\frac{k}{2K} \end{pmatrix}$$

mit beliebigen Konstanten C^0, C^1, C^2 , die durch die Normierung festgelegt werden:

$$|\mathbf{a}^0|^2 = 1 \Rightarrow C^0 = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2K^2}}, \quad |\mathbf{a}^1|^2 = 1 \Rightarrow C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\mathbf{a}^2|^2 = 1 \Rightarrow C^2 = \frac{\sqrt{2}K}{\sqrt{k^2 + 2K^2}}$$

Für den Fall $M = m \rightarrow K = k$ ergibt sich also für die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = 0 & \lambda_1 = \frac{C}{m} & \lambda_2 = 3\frac{C}{m} \\ \mathbf{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{a}^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Diese Eigenvektoren sind orthonormal, d.h., $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^k = \delta_{ik}$.

2 Wenn man die Komponenten einer Matrix $\mathbf{M}$ als $(\mathbf{M})_{ik} \equiv M_{ik}$ bezeichnet, dann ist

$$(\mathbf{AB})_{ik}^T = (\mathbf{AB})_{ki} = \sum_l A_{kl} B_{li} = \sum_l (\mathbf{A}^T)_{lk} (\mathbf{B}^T)_{il} = \sum_l (\mathbf{B})_{il}^T (\mathbf{A}^T)_{lk} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ik}$$

Da diese Gleichung für jede Komponente (d.h., jedes Indexpaar i, k) gilt, gilt sie für die Matrix als Ganzes, $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Für drei Matrizen faßt man zwei davon zusammen,

$$(\mathbf{ABC})^T = (\mathbf{KC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T = \mathbf{C}^T (\mathbf{AB})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

Für n Matrizen handelt man sich damit iterativ hoch:

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{A}_n)^T = \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_{n-1}^T \dots \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T$$

3 a) Eigenwerte:

$$\det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} (5 - \lambda) & -3 \\ -3 & (5 - \lambda) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (5 - \lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$$

Eigenvektoren: $\lambda_2 = 8$ einsetzen in $(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{a} = 0$ liefert zwei identische Gleichungen, $(-3a_1 - 3a_2) = 0$, also

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_1 = 2$ ergibt sich $(3a_1 - 3a_2) = 0$, also

$$\mathbf{a} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a_2 ist beides mal eine frei wählbare Konstante, die zur Normierung erhalten muß: Mit der Bedingung $|\mathbf{a}|^2 = 1$ folgen die normierten Eigenvektoren,

$\lambda_1 = 2$ $\mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\lambda_2 = 8$ $\mathbf{a}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
---	--

b) Die Matrix $\mathbf{U}$ und ihre Transponierte sind

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Bem.: Welcher Eigenwert in der ersten, und welcher in der zweiten Spalte steht, ist für das Endergebnis (siehe e)) natürlich egal. Die Definitionen von $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}^T$ können also vertauscht werden. Die Bedingung für eine orthogonale Matrix,

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \dots = \mathbf{1}$$

ist erfüllt.

Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß die Spalten- (oder Zeilen-) Vektoren paarweise orthogonal sind. Das ist hier per Konstruktion der Fall, denn $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}^2 = 0$.

c) Einsetzen der Definition der Koordinaten, $u_i = \sum_k U_{ik} q_k$, in das Potential:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,l} u_k D_{kl} u_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l,m,n} U_{km} q_m D_{kl} U_{ln} q_n = \frac{1}{2} \sum_{k,l,m,n} q_m (\mathbf{U}^T)_{mk} D_{kl} U_{ln} q_n \equiv \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{q})$$

Die transformierte Koeffizientenmatrix $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$ kann durch Matrixmultiplikation, von rechts nach links (!), leicht bestimmt werden:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Einschub: dahinter steckt das allgemeine Ergebnis, daß die Matrix $\mathbf{U}$, deren Spalten die Eigenvektoren $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \dots$ von $\mathbf{D}$ sind, die Matrix $\mathbf{D}$ diagonalisiert: Betrachte eine beliebige Komponente:

$$(\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U})_{ik} = \sum_{l,m} (\mathbf{U}^T)_{il} D_{lm} U_{mk} = \sum_{l,m} U_{li} D_{lm} U_{mk} = \sum_{l,m} a_l^i D_{lm} a_m^k = \mathbf{a}^i \cdot \underbrace{(\mathbf{D} \mathbf{a}^k)}_{= \lambda_k \mathbf{a}^k} = \lambda_i \delta_{ik}$$

wobei a_l^i die l -te Komponente des i -ten Eigenvektors ist; die Eigenvektoren sind normiert.

Ende Einschub.

Das Potential lautet also

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [\lambda_1 (q_1)^2 + \lambda_2 (q_2)^2]$$

d) Umkehren der Koordinatentransformation:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{u} = \mathbf{U}^T \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2) \end{pmatrix}$$

Wenn u_1 und u_2 durch x und y gegeben sind,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \end{aligned}$$

Alternativer Weg: $\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{q}$ in Komponenten ausschreiben und von Hand nach q_1, q_2 auflösen.

Skizze: die neuen Koordinaten-Achsen q_1, q_2 sind gerade die x - und y -Achse, aber um $+\pi/4$ gedreht.

Äquipotentiallinien:

$$V(q_1, q_2) = \text{const.} = V \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 = V \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{q_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{mit} \quad a^2 = \frac{V}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{V}{\lambda_2}$$

Die Äquipotentiallinien sind also Ellipsen, mit den Halbachsen a, b auf der q_1 bzw. q_2 -Achse.

e) Einsetzen der Koordinatentransformation in die kinetische Energie, komponentenweise,

$$u_k = \sum_l U_{kl} q_l \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_k = \sum_l U_{kl} \dot{q}_l \quad \text{in} \quad T = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\dot{u}_k)^2 \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} m_k U_{kl} \dot{q}_l U_{km} \dot{q}_m = \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} \dot{q}_l (\mathbf{U}^T)_{lk} m_k U_{km} \dot{q}_m \equiv \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \left(\mathbf{U}^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \mathbf{U} \dot{\mathbf{q}} \right)$$

Für identische Massen, $m_1 = m_2 = m$, fällt $\mathbf{U}$ heraus, und man bekommt den gewohnten Ausdruck,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}} \cdot \underbrace{(\mathbf{U}^T \mathbf{U})}_{=\mathbf{1}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{q}})^2$$

Die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen sind dann die zweier entkoppelter harmonischer Oszillatoren:

$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{2} m (\dot{q}_k)^2 - \frac{1}{2} \lambda_k (q_k)^2 \right] \quad \Rightarrow$	$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= 0 & , & & \omega_1^2 &= \lambda_1 / m \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= 0 & , & & \omega_2^2 &= \lambda_2 / m \end{aligned}$
---	--