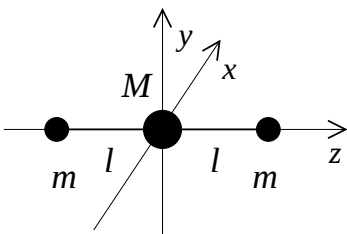


1 a) (i) Dreiatomiges Molekül:

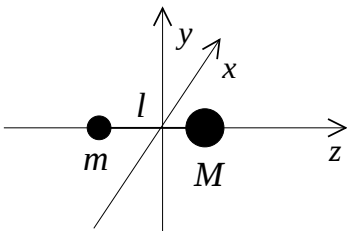


Die drei symmetriegerechten Rotationsachsen sind die Molekülachse als z -Achse und zwei dazu senkrechte Achsen: z.B. x nach hinten und y nach oben. Der Ursprung dieses Koordinatensystems (=Kreuzungspunkt der Rotationsachsen) soll im Schwerpunkt liegen, also auf M (die Massen sind natürlich Punktmassen ohne Ausdehnung!).

Dann ergibt sich:

$$I_z = 0 \quad , \quad I_x = I_y = ml^2 + ml^2 = 2ml^2$$

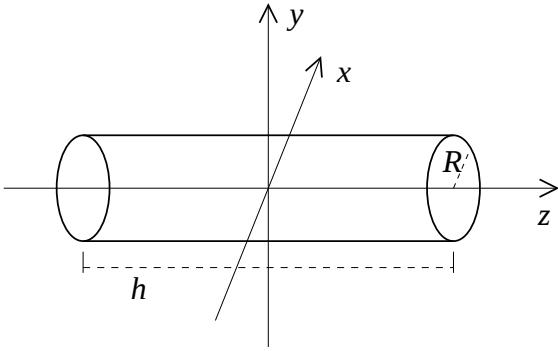
(ii) Zweiatomiges Molekül:



Die Rotationsachsen werden genauso gewählt wie eben, allerdings liegt der Ursprung=Schwerpunkt jetzt bei $l_{SP} = \frac{Ml}{m+M}$, von m aus gemessen auf der Molekül- (z -) Achse. m ist also l_{SP} vom SP entfernt, M dagegen nur $L_{SP} = l - l_{SP} = \frac{ml}{m+M}$. Damit folgt

$$I_z = 0 \quad , \quad I_x = I_y = m(l_{SP})^2 + M(L_{SP})^2 = \frac{mM^2 + Mm^2}{(m+M)^2} l^2 = \frac{mM}{m+M} l^2 \equiv \mu l^2$$

b) Zylinder mit Höhe h , Radius R , Masse M :



Die homogene Masseverteilung (=Dichte) ist dann $\rho = M/V$, $V = \pi R^2 h \rightarrow \rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$.

Das Trägheitsmoment für eine Masseverteilung ist im allgemeinen

$$I = \int_V \rho(\mathbf{r}) l^2 dV$$

wobei l der Abstand des Aufpunktes $\mathbf{r}$ von der gewählten Drehachse ist.

Für den Zylinder nimmt man natürlich Zylinderkoordinaten,

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi) \quad , \quad dV = dz dr r d\varphi$$

$$z = z$$

Für das Trägheitsmoment der z -Achse ist der Abstand $l = r$, also

$$I_z = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R l^2 r dr = \rho h 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \rho h R^4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z = \frac{1}{2} M R^2}$$

Für das Trägheitsmoment der x -Achse sind wieder Zylinderkoordinaten angebracht, anders läßt sich die Berandung des Integrationsvolumens (der Zylinder) kaum einbauen.

l ist nun der Abstand von $\mathbf{r}$ zur x -Achse: Die Projektion von $\mathbf{r} = (x, y, z)$ auf die x -Achse ist x ; nach Pythagoras gilt dann $|\mathbf{r}|^2 = l^2 + x^2$, also $l^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - x^2$,

$$l^2 = y^2 + z^2 = r^2 \cos^2(\varphi) + z^2$$

Dies einsetzen gibt

$$\begin{aligned} I_x &= \rho \left[\underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} dz}_{=h} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{=R^4/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi}_{=\pi} + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz}_{=h^3/12} \underbrace{\int_0^R r dr}_{=\pi R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \right] \\ &= \frac{M}{\pi h R^2} \left[\pi R^2 \frac{h^3}{12} + \pi h \frac{R^4}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_x = I_y = \frac{1}{4}M \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)}$$

2 Die Rotationsenergie ist allgemein gegeben durch

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

Wenn das Koordinatensystem des Körpers entsprechend den Symmetrieachsen gewählt wird (wie oben geübt), dann ist der Trägheitstensor diagonal,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

mit den Hauptträgheitsmomenten I_1, I_2, I_3 . Geben wir die gewünschte (beliebige) Rotationsachse $\mathbf{n}$ in den Komponenten $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ an, die auf dieses Koordinatensystem bezogen sind, dann ist mit $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{n} \omega$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \omega^2 (I_1 n_1^2 + I_2 n_2^2 + I_3 n_3^2)$$

3 a) Relativitätsprinzip: Die physikalischen Gesetze, d.h., die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind in allen Inertialsystemen gleich.

Inertialsystem: Bezugssystem, in dem ein kräftefreier Körper, der sich in Ruhe befindet, auch in Ruhe bleibt (= in dem sich ein kräftefreier Körper gleichförmig bewegt).

Wirkungsprinzip: Die Wirkung, die ein Funktional der möglichen Bahn eines Teilchens bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt ist, wird durch die physikalische Bahn des Teilchens extremalisiert. Physikalische Bahn = die Bahn, die auch aus den Newton-Gleichungen folgt, mit geeigneten Anfangsbedingungen.

b) Lagrange und Hamilton: Erde = $m, \mathbf{r}$, Sonne = $M, \mathbf{R}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{2} M (\dot{\mathbf{R}})^2 + G(t) \frac{m M}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$$

Dies ist geraten (einfach G durch $G(t)$ ersetzt), stimmt aber, denn die Lagrange-Gleichungen reproduzieren die Newton-Gleichungen für $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{R}(t)$.

Hamilton nach Definition: $\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}$,

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{R}} - \mathcal{L} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\mathbf{P}^2}{2M} - G(t) \frac{m M}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$$

c) Zeitverschiebungen: Energieerhaltung. Beispiele: Rein mechanische Systeme ohne Reibung oder zeitabhängige äußere Kräfte, z.B., Teilchen im Potential.

Raumverschiebungen: Impulserhaltung. Beispiel: Schwerpunktimpuls im Zweikörperproblem; Teilchen in konstanter (homogener) äußerer Kraft.

Drehungen: Drehimpulserhaltung. Beispiel: Teilchen im Zentralpotential, Drehimpuls im Zweikörperproblem.

d) Lagrangefunktion für Teilchen der Masse m , Ladung Q im Magnetfeld B :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + Q \mathbf{A}(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

Bei der Wahl des Vektorpotentials gibt es eine gewisse Freiheit (Eichfreiheit). Solange $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ das gewünschte Magnetfeld wiedergibt, sind auch die (Lagrange-) Bewegungsgleichungen dieselben.

Generell: $\mathcal{L} = T - V$ ist *keine Definition* der Lagrangefunktion. $\mathcal{L}$ definiert sich dadurch, daß die Lagrangegleichungen die Newton-Gleichungen für die gegebenen Kräfte (hier: Lorentzkraft) reproduzieren.

Die kanonischen Impulse und die Hamiltonfunktion dagegen sind definiert durch $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ und $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$.

e) Eigenwertproblem: $\mathbf{M} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$.

Lösen: aus $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}) = 0$ die Eigenwerte λ_i bestimmen, für jedes λ_i das homogene Gleichungssystem lösen und so den Eigenvektor $\mathbf{a}_i$ bestimmen. Eigenvektoren sind orthogonal, Eigenwerte reell.

f) Gegeben: $\mathcal{L} = (\dot{q})^2 - q^2 \dot{q}$.

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q} - q^2 \rightarrow \dot{q} = \frac{1}{2}(p + q^2) \quad , \quad \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = (\dot{q})^2 = \frac{1}{4}(p + q^2)^2$$

Bewegungsgleichung (Lagrange):

$$\frac{d}{dt}(2\dot{q} - q^2) = 2\ddot{q} - 2q\dot{q} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -2q\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = 0$$

Allgemeine Lösung: $q(t) = q_0 + v_0 t$.

Der zweite Term in $\mathcal{L}$, $-q^2 \dot{q}$, ist offenbar wirkungslos (buchstäblich!), was daran liegt, daß er eine totale Zeitableitung darstellt: $\mathcal{L} = (\dot{q})^2 - \frac{1}{3} \frac{d}{dt}(q^3)$.