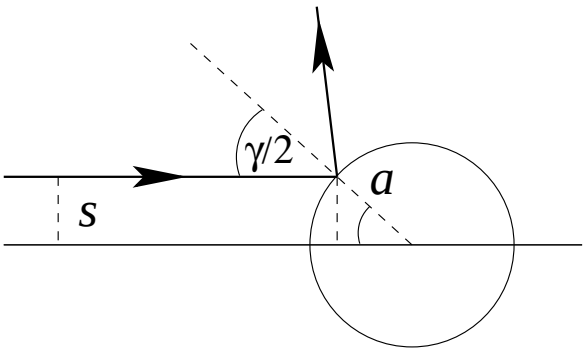
1 **a)** Mit dem Stoßparameter s und dem Streuinkel $\Theta = \pi - \gamma$ ergibt sich die folgende Geometrie:



Bei dem vollständig elastischen Stoß an der harten Kugel wird das Teilchen (Projektil) einfach mit Ausfallswinkel = Einfallswinkel = $\gamma/2$ reflektiert. Also:

$$\sin(\gamma/2) = \frac{s}{a} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2\arcsin(s/a) \quad \Rightarrow \quad \Theta = \pi - 2\arcsin(s/a) \;\; , \quad s \leq a$$

b) In der Vorlesung (Theorie A) wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt hergeleitet:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\Theta) = \frac{s(\Theta)}{\sin(\Theta)} \left| \frac{\mathrm{d}s(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta} \right|$$

Mit $s = a\sin(\gamma/2) = a\sin(\pi/2 - \Theta/2) = a\cos(\Theta/2)$ aus **a)** und $2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(x)$ aus Bronstein ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{a^2}{2}\frac{\cos(\Theta/2)\sin(\Theta/2)}{\sin(\Theta)} = \frac{a^2}{4}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{a^2}{4} \int \mathrm{d}\Omega = \pi a^2$$

σ ist also gerade die geometrische Querschnittsfläche der Kugel.

Raumwinkelintegral:

$$\int \mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin(\Theta)\mathrm{d}\Theta = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos(\Theta)) = 4\pi$$

2 **a)** Zwangsbedingung: $A(\mathbf{r},t) = x^2 + z^2 - l(t)^2\ ,\ A = 0$
Zwangskraft: $\mathbf{Z}(\mathbf{r},t) = \lambda(t)\,\nabla A = 2\lambda(t)\mathbf{r}\,.$
Langrange-Gleichungen 1. Art: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z}$
Hier ist die externe Kraft die Gravitation, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$, also,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda(t)\,x \\ m\ddot{z} &= -mg + 2\lambda(t)\,z \end{aligned}$$

Mit dem Einheitsvektor in $\mathbf{r}$-Richtung und der Zwangsbedingung $|\mathbf{r}| = l(t)$, also $\mathbf{r} = l(t)\mathbf{e}_r$ lautet die Zwangskraft

$$\mathbf{Z} = 2\lambda(t)l(t)\mathbf{e}_r$$

b) Die Richtung von $\mathbf{Z}||\mathbf{r}$ ist bekannt, Betrag und Vorzeichen stecken aber im unbekannten $\lambda(t)\,.$
Trick: Es gilt $A = 0$ für alle t, also auch $\dot{A} = \ddot{A} = 0\,.$
Für $l = const.$ heißt das: $\dot{A} = 2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\ ,\ \ \ddot{A} = 2[(\dot{\mathbf{r}})^2 + \mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}] = 0$
Mit der Lagrange-Gleichung folgt daraus

$$0 = m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \mathbf{r}\mathbf{F} + \mathbf{r}\mathbf{Z}$$

Es gilt nun $\mathbf{r} = l\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{Z} = 2\lambda l\mathbf{e}_r\,.$ Einsetzen und Auflösen nach $2\lambda l$ liefert

$$\mathbf{Z} = -[\,m(\dot{\mathbf{r}})^2/l + \mathbf{e}_r\mathbf{F}\,]\mathbf{e}_r$$

Die Zwangskraft zeigt also zum Aufhängepunkt. $|\mathbf{Z}|$ enthält die Radialkomponente der externen Kraft und die Zentrifugalkraft $\frac{m}{l}v^2$, v =Bahngeschwindigkeit. Diese Kräfte werden genau kompensiert.

c) Winkel als Koordinate: $x = l\sin(\varphi)\,, z = -l\cos(\varphi)\ \Rightarrow\ \mathbf{r} = l\mathbf{e}_r\,, \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$
Damit ergibt sich für $l = const.$: $\dot{x} = l\cos(\varphi)\dot{\varphi}\,,\ \ddot{x} = -l\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + l\cos(\varphi)\ddot{\varphi}$
und analog für z, also $(\dot{\mathbf{r}})^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = l^2\,\dot{\varphi}^2\,.$
Die Radialkomponente der Gravitationskraft ist $\mathbf{e}_r\mathbf{F} = mg\,\cos(\varphi)$, also

$$\mathbf{Z} = -\left[ml\,\dot{\varphi}^2 + mg\,\cos(\varphi)\right]\begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Zusammen mit $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ in die Lagrangegleichungen $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{Z}$ eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
ml\ddot{\varphi} &= -mg\sin(\varphi) \\
ml\ddot{\varphi} &= -mg[\,1-\cos(\varphi)^2\,]\frac{1}{\sin(\varphi)} = -mg\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

also zweimal die bekannte Bewegungsgleichung des Pendels.

d) Energieänderung: Vorlesung (konservatives Kraftfeld $\mathbf{F}$): $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\lambda(t)\dfrac{\partial}{\partial t}A(\mathbf{r},t)$.
Beachte: die Energie ändert sich nur durch die explizit zeitabhängige Zwangsbedingung. Für $l = const.$ gilt Energieerhaltung.
Hier: $\frac{\partial}{\partial t}A = -2l\dot{l} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2\lambda l\dot{l}$.
In **a)** wurde schon festgestellt, daß $\mathbf{Z} = 2\lambda(t)l(t)\mathbf{e}_r$ ist. Mit der Richtung $\mathbf{Z} = -|\mathbf{Z}|\mathbf{e}_r$ aus **b** ist also $\lambda(t) < 0$, und es gilt (für nicht zu große $\dot{l}$)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -|\mathbf{Z}|\,\dot{l}$$

Aus **c)** wissen wir nun, daß die Zwangskraft betragsmäßig am größten ist am Nullpunkt $\varphi = 0$, und am geringsten am Umkehrpunkt $\varphi = \varphi_m$; am Nullpunkt ist auch die Zentrifugalkraft maximal, denn $\dot{\varphi}$ ist maximal.
Also wird der Physiker, nachdem er diese Rechnungen unter den erschwerten Bedingungen des Schaukelns ausgeführt hat, zu der Erkenntnis kommen, daß er die Energieveränderung positiv machen kann, wenn er
am Nullpunkt $\dot{l} < 0$ wählt, also aufsteht,
am Umkehrpunkt $\dot{l} > 0$ wählt, sich also wieder hinsetzt.