$\boxed{1}$ **a)** Transformation auf die generalisierten Koordinaten (= Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= l\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= l\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= l\cos(\theta) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= l\cos(\theta)\,\dot{\theta}\cos(\varphi) - l\sin(\theta)\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{y} &= l\cos(\theta)\,\dot{\theta}\sin(\varphi) + l\sin(\theta)\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= -\,l\sin(\theta)\,\dot{\theta} \end{aligned}$$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ml^2\{\ (\dot{\theta})^2\,[\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)] + \\ &\qquad +(\dot{\varphi})^2\,[\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)] + \\ &\qquad +2\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\,[0]\ \} \\ &= \frac{1}{2}ml^2\,[\,(\dot{\theta})^2 + \sin^2(\theta)\,(\dot{\varphi})^2\,] \end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$V = mgh = -mg\,z = -mgl\cos(\theta)$$

für geeignet gewählten Bezugspunkt $h = 0$. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$\boxed{\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}; \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\,[\,(\dot{\theta})^2 + (\sin(\theta)\,\dot{\varphi})^2\,] + mgl\cos(\theta)}$$

b) Lagrangegleichung allgemein: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$ für jede generalisierte Koordinate q.

Hier: $q = \varphi$,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi} \qquad\qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z = 0 \quad \text{mit} \quad L_z := m(l\sin(\theta))^2\,\dot{\varphi}}$$

Bedeutung: Es gibt offenbar eine Erhaltungsgröße (= Integral/Konstante der Bewegung). Dies ist L_z, der Drehimpuls in z-Richtung. L_z ist erhalten, weil die Lagrangefunktion nicht von φ abhängt (φ ist eine "zyklische" Koordinate), also symmetrisch bezüglich (= invariant unter) Drehungen um die z-Achse ist. Letzteres ist ja auch anschaulich klar.
(Achtung: die Erhaltungsgröße ist der Drehimpuls L_z, *nicht* etwa die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$!)

c) Lagrangegleichung für θ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\,\dot{\theta} \qquad\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = ml^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\,(\dot{\varphi})^2 - mgl\sin(\theta)$$

Die Bewegungsgleichung ist damit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) + (\dot{\varphi})^2\,\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Wenn wir jetzt $\dot{\varphi}$ durch L_z ersetzen, erhalten wir eine (nichtlineare) Bewegungsgleichung alleine für $\theta(t)$, denn L_z ist ja zeitlich konstant. Einsetzen von $\dot{\varphi} = L_z \,/\, (ml^2\sin^2(\theta))$ ergibt also

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) + \frac{L_z^2\cos(\theta)}{m^2l^4\sin^3(\theta)}}$$

Für kleine Auslenkungen θ entwickelt man wie üblich $\sin(\theta) \approx \theta$ und $\cos(\theta) \approx 1 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} = f(\theta)\,, \quad f(\theta) = -\frac{g}{l}\theta + \frac{L_z^2}{m^2l^4\theta^3}}$$

d) Diese Bewegungsgleichung ist natürlich immer noch nicht ohne weiteres lösbar. Offenbar setzt sich die generalisierte "Kraft" $f(\theta)$ aus zwei gegensätzlichen Anteilen zusammen: die rücktreibende Kraft $-\frac{g}{l}\theta$ des harmonischen Pendels und die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft. Für $\dot{\theta} = 0$ ergibt sich damit eine neue Ruhelage $\theta_0 > 0$, die durch L_z bestimmt wird, was wiederum durch Anfangsbedingungen vorgegeben wird. Ruhelage:

$$f(\theta_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_0 = \left(\frac{L_z^2}{m^2gl^3}\right)^{1/4}$$

Die Näherung besteht nun darin, für kleine Auslenkungen um diese Ruhelage zu entwickeln: Taylor:

$$f(\theta) \approx \underbrace{f(\theta_0)}_{=0} + f'(\theta_0)\,(\theta-\theta_0) \;\;, \quad f'(\theta_0) = -\frac{g}{l} - 3\frac{L_z^2}{m^2l^4\theta_0^4} = -4\frac{g}{l}$$

Einsetzen von $f(\theta)$ liefert die genäherte Bewegungsgleichung für $\theta(t)$,

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + 4\frac{g}{l}[\theta(t) - \theta_0] = 0}$$

also ein harmonisches Pendel (Oszillator) mit verschobener Ruhelage θ_0 und erhöhter Eigenfrequenz $\omega_0 = 2\sqrt{g\,/\,l}$. Dieser Pendelbewegung in θ-Richtung ist eine Kreisbewegung in der x-y-Ebene überlagert. Diese ist allerdings nicht gleichförmig, da (wie gesagt) $\dot{\varphi}$ nicht konstant ist (sondern L_z): $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\theta) \approx \dfrac{L_z}{ml^2\theta^2}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ **a)** Energie der Feder: $U_F = \frac{1}{2} D\,(q-a)^2$, q =Abstand der Massen.
Wir brauchen q als Funktion der Winkel φ_1, φ_2 .
Dazu:

$$\begin{aligned} x_1 &= l\sin(\varphi_1) \qquad & x_2 &= l\sin(\varphi_2) + a \\ y_1 &= -l\cos(\varphi_1) \qquad & y_2 &= -l\cos(\varphi_2) \end{aligned}$$

Für das Abstandsquadrat ergibt sich damit

$$\begin{aligned} q^2 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 &= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 \\ &= l^2\left[\,(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) + \tfrac{a}{l})^2 + (\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1))^2\,\right] \end{aligned}$$

Alles ausmultiplizieren und ausnutzen von
$\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ liefert
$q^2 = 2l^2\left[\dfrac{a^2}{2l^2} + \dfrac{a}{l}[\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)] + 1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\right]$.
Die Wurzel daraus und in $U_F = \frac{1}{2} D\,(q-a)^2$ eingesetzt ergibt schließlich

$$\boxed{U_F = Dl^2\left\{\sqrt{\frac{a^2}{2l^2} + \frac{a}{l}[\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)] + [1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]} - \frac{a}{\sqrt{2}l}\right\}^2}$$

b) Gesamte potentielle Energie: $U = U_F + m_1 g h_1 + m_2 g h_2$.
Die Höhen der Massen über dem tiefsten Punkt (Ruhelage) sind $h_{1,2} = (l - |y_{1,2}|) = l - l\cos(\varphi_{1,2})$, also

$$\boxed{U(\varphi_1,\varphi_2) = U_F + m_1 g l[\,1 - \cos(\varphi_1)\,] + m_2 g l[\,1 - \cos(\varphi_2)\,]}$$

Näherung für kleine Winkel:

Systematik: Eigentlich müßte man zuerst sin und cos bis zur quadratischen Ordnung entwickeln (Bronstein), d.h., $\sin(\varphi) \simeq \varphi$ und $\cos(\varphi) \simeq 1 - \dfrac{1}{2}\varphi^2$, dieses in U einsetzen und die Wurzel mit $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$ entwickeln. Dann in U_F den $\{\ldots\}^2$-Term ausmultiplizieren und alle Terme höherer als quadratischer Ordnung, d.h., $\sim \varphi_1^3, \varphi_2^3, \varphi_1\varphi_2^2$ etc., weglassen.

Glücklicherweise vereinfacht sich die Wurzel von selbst, und man braucht nur stur durchrechnen: Mit $\sin(\varphi) \simeq \varphi$ und $\cos(\varphi) \simeq 1 - \dfrac{1}{2}\varphi^2$ ergibt sich in U_F

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdots} &\simeq \sqrt{\frac{a^2}{2l^2} + \frac{a}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}l}\sqrt{1 + 2\frac{l}{a}(\varphi_2 - \varphi_1) + \left(\frac{l}{a}\right)^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}l}\sqrt{\left(1 + \frac{l}{a}(\varphi_2 - \varphi_1)\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}l} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

und damit $U_F = \frac{1}{2} D l^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$.
Werden nun noch die cos in der Schwereenergie entwickelt, erhält man

$$\boxed{U(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} g l (m_1 \varphi_1^2 + m_2 \varphi_2^2) + \frac{1}{2} D l^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}$$

Als ersten Test der Rechnung kann man sich davon überzeugen, daß das Minimum der potentiellen Energie, also die Gleichgewichtslage, wie gefordert bei $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ liegt.

c) Für die Lagrangefunktion brauchen wir noch die kinetische Energie:
$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$.
Mit $\dot{x}_1 = l \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1$, $\dot{y}_1 = l \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 \;\Rightarrow\; (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = l^2 \dot{\varphi}_1^2$ und analog für φ_2 folgt

$$\boxed{\mathcal{L}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1; \varphi_2, \dot{\varphi}_2) = T - U = \frac{l^2}{2} \left[m_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{g}{l}(m_1 \varphi_1^2 + m_2 \varphi_2^2) - D(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \right]}$$

Die Lagrangegleichungen lauten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{1,2}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{1,2}}$. Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l} \varphi_1 &= -\frac{D}{m_1}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l} \varphi_2 &= -\frac{D}{m_2}(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}}$$

Die linken Seiten sind offenbar die Bewegungsgleichungen zweier mathematischer Pendel in harmonischer Näherung, wie aus Theorie A bekannt. Die rechte Seite koppelt diese harmonischen Oszillatoren über das lineare Kraftgesetz der Feder aneinender $\leftrightarrow$ "gekoppelte harmonische Oszillatoren".