1 a) Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}Dq_1^2 - \frac{1}{2}Dq_2^2 - \frac{1}{2}D(q_2 - q_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - D(q_1^2 + q_2^2 - q_1q_2)\end{aligned}$$

Lagrangegleichungen: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$, $k = 1, 2$

$$m_1\ddot{q}_1 = -D(2q_1 - q_2)$$

$$m_2\ddot{q}_2 = -D(2q_2 - q_1)$$

b) Komplexer Ansatz: $q_{1,2}(t) = b_{1,2} e^{-i\omega t} \Rightarrow \ddot{q}_{1,2}(t) = -\omega^2 b_{1,2} e^{-i\omega t}$, einsetzen,

$$\begin{aligned}m_1\omega^2 b_1 &= D(2b_1 - b_2) \\ m_2\omega^2 b_2 &= D(2b_2 - b_1)\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (\omega^2 - 2K_1)b_1 + K_1 b_2 = 0 \\ K_2 b_1 + (\omega^2 - 2K_2)b_2 = 0 \end{cases}, \quad K_{1,2} = \frac{D}{m_{1,2}}$$

Dieses homogene Gleichungssystem für die Ansatzkoeffizienten $b_{1,2}$ besitzt eine nichttriviale Lösung nur, falls

$$(\omega^2 - 2K_1)(\omega^2 - 2K_2) - K_1 K_2 = 0$$

Die erlaubten Eigenfrequenzen sind die Lösungen dieser Gleichung, nämlich $\omega = \omega_+$ und $\omega = \omega_-$ mit

$$\omega_{\pm}^2 = (K_1 + K_2) \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_1 K_2}$$

Zur Eigenfrequenz ω_+, ω_- lautet jeweils die Lösung des Gleichungssystems

$$b_1^{(+)} = -\frac{\omega_+^2 - 2K_2}{K_2} b_2^{(+)} = -\frac{K_1}{\omega_+^2 - 2K_1} b_2^{(+)}, \quad b_1^{(-)} = -\frac{\omega_-^2 - 2K_2}{K_2} b_2^{(-)} = -\frac{K_1}{\omega_-^2 - 2K_1} b_2^{(-)}$$

Die Koeffizienten $b_2^{(+)}, b_2^{(-)}$ bleiben unbestimmt und werden erst durch Anfangsbedingungen festgelegt (Integrationskonstanten).

c) Der Ansatz liefert jetzt zwei linear unabhängige Lösungen $(+, -)$ für jede der beiden Bewegungsgleichungen $(1, 2)$, $q_{1,2}^{(\pm)}(t) = b_{1,2}^{(\pm)} e^{-i\omega_{\pm}t}$.

Die allgemeine Lösung lautet also $q_{1,2}(t) = b_{1,2}^{(+)} e^{-i\omega_+t} + b_{1,2}^{(-)} e^{-i\omega_-t}$.

Da $b_2^{(+)}$ und $b_2^{(-)}$ Integrationskonstanten sind, geben wir diesen neue Namen, $b_2^{(+)} \rightarrow A$ und $b_2^{(-)} \rightarrow B$, also

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \left(2 - \frac{\omega_+^2}{K_2}\right) A e^{-i\omega_+t} + \left(2 - \frac{\omega_-^2}{K_2}\right) B e^{-i\omega_-t} \\ q_2(t) &= A e^{-i\omega_+t} + B e^{-i\omega_-t} \end{aligned}$$

Die physikalische Lösung ist der Realteil der komplexen $q_{1,2}(t)$. Mit

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$$

für zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} q_1(t) &= \left(2 - \frac{\omega_+^2}{K_2}\right) \underbrace{[\operatorname{Re}(A) \cos(\omega_+t) + \operatorname{Im}(A) \sin(\omega_+t)]}_{= C_+ \cos(\omega_+t - \varphi_+)} + \\ &\quad + \left(2 - \frac{\omega_-^2}{K_2}\right) \underbrace{[\operatorname{Re}(B) \cos(\omega_-t) + \operatorname{Im}(B) \sin(\omega_-t)]}_{= C_- \cos(\omega_-t - \varphi_-)} \\ \operatorname{Re} q_2(t) &= [\operatorname{Re}(A) \cos(\omega_+t) + \operatorname{Im}(A) \sin(\omega_+t)] + [\operatorname{Re}(B) \cos(\omega_-t) + \operatorname{Im}(B) \sin(\omega_-t)] \end{aligned}$$

Dies läßt sich natürlich kompakter in Vektoren schreiben, siehe unten.

Die reellen Integrationskonstanten sind $\operatorname{Re}(A), \operatorname{Re}(B), \operatorname{Im}(A), \operatorname{Im}(B)$ oder alternativ

$C_+, C_-, \varphi_+, \varphi_-$, also 4 Stück. Das ist korrekt, denn wir haben zwei Differentialgleichungen von 2. Ordnung.

d) Das System wird offenbar durch zwei unabhängige (entkoppelte) harmonische Oszillatoren mit den Eigenfrequenzen ω_+ bzw. ω_- beschrieben.

Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir die Anfangsbedingung $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$, also $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B) = 0$ oder $\varphi_- = \varphi_+ = 0$. Damit erhält man

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \omega_+^2/K_2 \\ 1 \end{pmatrix} C_+ \cos(\omega_+t) + \begin{pmatrix} 2 - \omega_-^2/K_2 \\ 1 \end{pmatrix} C_- \cos(\omega_-t)$$

Für gleiche Massen $m_1 = m_2 = m$ also $K_1 = K_2 = K = D/m$ vereinfacht sich dies weiter,

$$\begin{aligned} \omega_+^2 &= 3K, \quad \omega_-^2 = K \\ \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} C_+ \cos(\omega_+t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_- \cos(\omega_-t) \end{aligned}$$

Zu den beiden Oszillatoren $(+, -)$ korrespondieren offenbar zwei Eigenmoden: Die beiden Massen schwingen gegeneinander mit der Frequenz ω_+ oder miteinander (gleichphasig) mit der Frequenz

ω_- . Im allgemeinen ist die Schwingung eine Überlagerung beider Moden. Der Anteil der Moden an der Schwingung wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt; so kann man durch geeignete Wahl von $q_1(0)$ und $q_2(0)$ natürlich auch die Moden gezielt anregen.

2 a)

$V(x, y) =$	$\frac{x}{y^2 + a^2}$	$\frac{1}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$f(x) + g(y)$
$\frac{\partial V}{\partial x} =$	$\frac{1}{y^2 + a^2}$	$\frac{-x}{r^3}$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$
$\frac{\partial V}{\partial y} =$	$\frac{-2xy}{(y^2 + a^2)^2}$	$\frac{-y}{r^3}$	$\frac{\partial g(y)}{\partial y}$
$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} =$	$\frac{-2y}{(y^2 + a^2)^2}$	$\frac{3xy}{r^5}$	0

b)

$W(q, \dot{q}, t) =$	$a\dot{q}^2$	$a\dot{q}^2 - bq\dot{q}$	$-bf(q)e^{-\lambda t}$
$\frac{\partial W}{\partial q} =$	0	$-b\dot{q}$	$-b e^{-\lambda t} \frac{\partial f(q)}{\partial q}$
$\frac{\partial W}{\partial \dot{q}} =$	$2a\dot{q}$	$2a\dot{q} - bq$	0
$\frac{\partial W}{\partial t} =$	0	0	$\lambda b f(q) e^{-\lambda t}$

c)

$u(t) = F(x(t), y(t))$	$\dot{u} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y}$
$u(t) = G(q(t), \dot{q}(t), t)$	$\dot{u} = \frac{\partial G}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial G}{\partial t}$
$u(t) = \dot{q}(t)^3 + bq(t)^2 \sin(\lambda t)$	$\dot{u} = 3\dot{q}^2 \ddot{q} + 2b q \dot{q} \sin(\lambda t) + \lambda b q^2 \cos(\lambda t)$

d)

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{\partial y(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x}$$

Offenbar ist $\dot{y}$ eine Funktion von $\dot{x}$, $\dot{y} = \dot{y}(\dot{x})$. Also kann man die partielle Ableitung bilden,

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial y}{\partial x}$$