

Übungsblatt Nr. 4 zur Theorie B (Mechanik)

- 1** Ein Teilchen der Ladung e im elektromagnetischen Feld wird durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\Phi(\mathbf{r}) + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

beschrieben. Das elektrische ($\mathbf{E}$) und magnetische ($\mathbf{B}$) Feld werden durch die Potentiale Φ und $\mathbf{A}$ repräsentiert.

- a) Bestimmen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für $x(t), y(t), z(t)$ mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_1 = (0, xB, 0), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_2 = (-yB, 0, 0), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2),$$

und $\Phi = -xE + \Phi_0$. Geben Sie $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ an.

- b) Gewinnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für $\mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Zeigen Sie, daß für $z = \text{const.}$ die Bewegung auf einer Kreisbahn erfolgt.

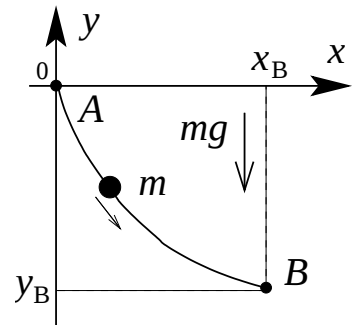
- c) Man berechne nun die allgemeine Lösung für $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ und $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

Hinweis: $y(t) = \tilde{y}(t) - \frac{cE}{B}t$

- 2** Ein Passagier der Masse m gleitet reibungsfrei und ohne Anfangsgeschwindigkeit im Schwerfeld auf einer Notrutsche der Form $y(x)$ von $A = (0, 0)$ nach $B = (x_B, y_B)$. Die dafür benötigte Zeit ist gegeben durch

$$T_{AB} = \int_A^B \frac{ds}{|\mathbf{v}|}, \quad ds = \text{Bogenlängenelement}, \quad \mathbf{v} = \text{Geschw.}$$

Gesucht ist die Kurve $y(x)$ mit minimalem T_{AB} .



- a) Stellen Sie T_{AB} als Funktional von $y(x)$ dar, $T_{AB}[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} dx K(y(x), y'(x))$, $y' \equiv \frac{dy}{dx}$. Drücken Sie dazu ds durch dx und y' aus, und eliminieren Sie $|\mathbf{v}|$ über die Energieerhaltung.

- b) Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für beliebiges $K(y, y')$ an. Zeigen Sie (für bel. K), daß die Größe $I = \frac{\partial K}{\partial y'} y' - K$ für die extremale Kurve $y(x)$ konstant ist: $\frac{dI}{dx} = 0$. Wie lautet I für das K aus a)?

- c) Berechnen Sie nun $y(x)$ der Notrutsche durch Ausnutzen von $I = \text{const.} = I_B$. Gewinnen Sie eine DGL der Form $\frac{dy}{dx} = \sqrt{(\alpha + y)/(-y)}$, und lösen Sie diese über den Ansatz $y = y(\tau) = -\frac{\alpha}{2}[1 - \cos(\tau)]$, $0 < \tau < \tau_B$ für die "Parameterdarstellung" $x(\tau), y(\tau)$. Bestimmen Sie $x(\tau)$.

- d) Bestimmen Sie die Konstanten I_B, τ_B für die Randbedingung $y_B/x_B = -2/\pi$, $y_B = -h$. Wie verläuft $y(x)$ für kleine x (also kleine τ)?