1 a) Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 - e\Phi(\mathbf{r}) + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{2}m(\dot{x}_i)^2 - e\Phi + \frac{e}{c} \sum_{i=x,y,z} A_i \dot{x}_i$$

Für die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \left[m \dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i \right] = m \ddot{x}_i + \frac{e}{c} \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \dot{x}_k, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \sum_{k=x,y,z} \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}$$

Zusammen $\Rightarrow$

$$\boxed{m \ddot{x}_i = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \sum_{k=x,y,z} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k} \tag{1}$$

Einsetzen: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = (0, xB, 0)$, $\Phi = -xE + \Phi_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= eE + \frac{e}{c} B \dot{y} \\ m \ddot{y} &= -\frac{e}{c} B \dot{x} \\ m \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{m \ddot{\mathbf{r}} = eE \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e}{c} B \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{2}$$

Einsetzen: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 = (-yB, 0, 0)$, $\Phi = -xE + \Phi_0 \Rightarrow$ wieder Gl.(2)!

Einsetzen: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2)$, $\Phi = -xE + \Phi_0 \Rightarrow$ wieder Gl.(2), denn Gl.(1) ist linear in den A_i .

Diese Bewegungsgleichungen enthalten die Felder:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}}$$

Eichfreiheit: Diese physikalische Äquivalenz verschiedener Vektorpotentiale nennt sich Eichfreiheit (siehe Theorie C). Im allgemeinen führen zwei Vektorpotentiale $\mathbf{A}$ und $\widetilde{\mathbf{A}}$ mit

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda(r) \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \widetilde{\mathbf{A}}$$

auf dasselbe B -Feld.

Die Bewegungsgleichung ist auch eichunabhängig, denn dort geht (natürlich) nur das

physikalische B -Feld ein: Man kann sich überzeugen, daß Gl.(1) geschrieben werden kann als

$$m\ddot{x}_i = -e\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i$$

also $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{F}_L$ Lorentzkraft

b) Für $E = 0$ lauten die Bewegungsgleichungen (2)

$$\ddot{x} = \omega_C \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_C \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0 \quad \text{mit der Zyklotronfrequenz} \quad \boxed{\omega_C = \frac{eB}{mc}} \quad (3)$$

In z -Richtung: gleichförmige Bewegung: $z(t) = z_0 + v_z^0 t$.

In x - y -Ebene: Leite 1. Gl. einmal nach t ab, um rechts $\dot{y}$ zu bekommen. Benutze dazu Geschwindigkeiten:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{v}_x = \omega_C v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_C v_x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ddot{v}_x = \omega_C \dot{v}_y \\ \ddot{v}_y = -\omega_C \dot{v}_x \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega_C^2 v_x = 0$$

Harmonischer Oszillator (das Übliche ...), allgemeine Lösung: $v_x(t) = v_0 \cos(\omega_C t + \varphi_0)$.

Aus $v_y = \frac{1}{\omega_C} \dot{v}_x$ ergibt sich jetzt $v_y = -v_0 \sin(\omega_C t + \varphi_0)$, und daraus $x(t), y(t)$ durch integrieren:

$x(t) = x_0 + \int dt v_x(t)$, also

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\omega_C} \sin(\omega_C t + \varphi_0) \\ y(t) = y_0 + \frac{v_0}{\omega_C} \cos(\omega_C t + \varphi_0) \\ z(t) = z_0 + v_z^0 t \end{array}}$$

Die Integrationskonstanten sind $x_0, y_0, z_0, v_0, \varphi_0, v_z^0$, also 6 Stück, wie erforderlich (3 DGLs 2. Ordnung).

Für $z = \text{const.}$ gilt

$$\boxed{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = (v_0/\omega_C)^2}$$

d.h., die Bewegung in der x - y -Ebene verläuft auf einer Kreisbahn um den Mittelpunkt (x_0, y_0) mit dem sog. Zyklotronradius $R_c = \frac{v_0}{\omega_C} = \frac{v_0 mc}{eB}$.

Für $v_z^0 \neq 0$ wird dem eine gleichförmige Bewegung in z -Richtung überlagert, das Teilchen führt eine Spiralbahn aus.

c) Für $E \neq 0$ lauten die Bewegungsgleichungen (2)

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m} + \omega_C \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_C \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0 \quad \text{mit der Zyklotronfrequenz} \quad \boxed{\omega_C = \frac{eB}{mc}}$$

Mit der Substitution $y(t) = \tilde{y}(t) - \frac{cE}{B}t$ wird daraus

$$\ddot{x} = \omega_C \left(\dot{\tilde{y}} - \frac{cE}{B} \right) + \frac{eE}{m} = \omega_C \dot{\tilde{y}} \quad , \quad \ddot{\tilde{y}} = -\omega_C \dot{x} \quad , \quad \ddot{z} = 0$$

also genau die Gleichungen (3) von oben. Die allgemeine Lösung lautet also, nachdem $\tilde{y}(t)$ wieder in $y(t)$ eingesetzt wurde,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\omega_C} \sin(\omega_C t + \varphi_0) \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_0}{\omega_C} \cos(\omega_C t + \varphi_0) - \frac{cE}{B} t \\ z(t) &= z_0 + v_z^0 t \end{aligned}$$

Für ein E -Feld in x -Richtung kommt zu der Kreisbewegung in der x - y -Ebene also eine Driftbewegung in y -Richtung dazu; Halleffekt.

2 a) Bogenlängenelement:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad , \quad dy = \frac{dy}{dx} dx \equiv y' dx \quad \Rightarrow \quad ds = dx \sqrt{1 + (y')^2}$$

Energie: $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$, $h = |y_B| + y$, $y < 0$.

Energieerhaltung: Bei $t = 0, x = 0, y = 0$: nur potentiell: $E_0 = mg|y_B|$, $\Rightarrow mv^2 = -2mgy$,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{-2gy}$$

Die Rutschzeit von A nach B lautet damit:

$$T_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{-2gy}} \quad \Leftrightarrow \quad K(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{-2gy}}$$

b) Euler-Lagrange-Gleichung, beliebiges K :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} - \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

Herleitung: Mit $y(x) =$ Testfunktion, $\tilde{y}(x) =$ Funktion, die K extremalisiert, $\eta(x) =$ beliebige Funktion ("Störung") mit $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$: $y(x) = \tilde{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$.

Suche Extremum des Funktionals: $\frac{dT_{AB}}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left\{ \frac{\partial K}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial K}{\partial y'} \eta'(x) \right\} = 0$

mit $y'(x) = \tilde{y}'(x) + \varepsilon\eta'(x)$.

Im zweiten Term partielle Integration:

$$\int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\partial K}{\partial y'} \eta'(x) = \eta(x) \frac{\partial K}{\partial y'} \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} \right) \eta(x)$$

Der Randterm ist 0, da $\eta(x)$ an den Rändern verschwinden soll, also

$$\frac{dT_{AB}}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left\{ \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} \right\} \eta(x) = 0$$

Dies soll für beliebige $\eta(x)$ null sein, also muß die geschweifte Klammer null sein $\rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung.

Im Folgenden wird die extremale Bahn $\tilde{y}(x)$ auch mit $y(x)$ bezeichnet.

“Erhaltungsgröße”: $I = \frac{\partial K}{\partial y'} y' - K$

Allgemein, beliebiges K :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial K}{\partial y'} y'' - \frac{dK}{dx} \\ \frac{dK}{dx} &= \frac{\partial K}{\partial y} y' + \frac{\partial K}{\partial y'} y'' \end{aligned}$$

Einsetzen $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} - \frac{\partial K}{\partial y} \right) y'}$$

Die extremale Bahn erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung, daher ist für diese Bahn der obige Ausdruck = 0.

Für das Rutschenproblem gilt

$$\frac{\partial K}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2} \sqrt{-2gy}} \quad \text{und es folgt} \quad \boxed{I = \frac{-1}{\sqrt{1 + (y')^2} \sqrt{-2gy}}}$$

c) Da $I = \text{const.}$ ist, kann es als Parameter/Konstante fest gewählt werden, der die Bahn $y(x)$ charakterisiert; z.B. $I = I_B$; dann:

$$I_B^2 = \frac{1}{(1 + (y')^2)(-2gy)} \Rightarrow \boxed{y' \equiv \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\alpha + y}{-y}}, \quad \alpha = \frac{1}{2gI_B^2}}$$

Natürlich muß I_B so gewählt werden, daß stets $|y| < \alpha$ gilt. Dies ist der Fall, wenn α an die Randbedingung angepaßt wird, siehe d).

Lösungsansatz: Parameterdarstellung: $y(\tau) = -\frac{\alpha}{2}[1 - \cos(\tau)]$, $x(\tau) = ??$, $0 < \tau < \tau_B$

Trick: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dx}$, $\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\alpha}{2} \sin(\tau) \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = -\frac{\alpha}{2} \sin(\tau) \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1}$

Mit $\sqrt{\frac{-y}{\alpha + y}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\tau)}{1 + \cos(\tau)}} = \frac{1 - \cos(\tau)}{\sin(\tau)}$ (Bronstein) folgt $\frac{dx}{d\tau} = \mp \frac{\alpha}{2} [1 - \cos(\tau)]$

Einmal integrieren, $x(\tau) - x_A = \int_0^\tau d\bar{\tau} \frac{dx}{d\bar{\tau}}$, $x_A = 0$, $x(\tau) = \mp \frac{\alpha}{2}[\tau - \sin(\tau)]$. Da $x(\tau) > 0$ zumindest für kleine τ gelten sollte, ist das pos. Vorzeichen das richtige, also:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{\alpha}{2}[\tau - \sin(\tau)] \\ y(\tau) &= -\frac{\alpha}{2}[1 - \cos(\tau)] \end{aligned}$$

Diese "Bahn" ist eine Zykloide,

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\tau\right)^2 + \left(y + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

d) Die Rechnung bescherte uns 2 Konstanten, I_B und τ_B , die zu den verbleibenden Randwerten x_B, y_B äquivalent sind:

$$\frac{y_B}{x_B} = \frac{y(\tau_B)}{x(\tau_B)} = \frac{\cos(\tau_B) - 1}{\tau_B - \sin(\tau_B)} = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow \tau_B = \pi$$

$$\text{Und: } y_B = -\frac{\alpha}{2}[1 - \cos(\tau_B)] = -\alpha = -h \Rightarrow I_B^2 = \frac{1}{2gh}$$

Kleine x, y, τ : $\sin(\tau) \simeq \tau - \frac{\tau^3}{6}$, $\cos(\tau) \simeq 1 - \frac{\tau^2}{2} \Rightarrow x(\tau) \simeq \frac{\alpha}{2} \frac{\tau^3}{6}$, $y(\tau) \simeq -\frac{\alpha}{2} \frac{\tau^2}{2}$,

$$y(x) \simeq -\frac{\alpha}{4} \left(\frac{12x}{\alpha}\right)^{2/3}$$