

Übungsblatt Nr. 5 zur Theorie B (Mechanik)

- 1** Der schiefe Wurf einer Kugel der Masse m im Schwerfeld der Erde soll durch Variation aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung berechnet werden. Die Kugel bewegt sich in der x - z -Ebene, die Schwerkraft zeigt in negative z -Richtung.

a) Berechnen Sie die Wirkung der Kugel, $S[\mathbf{r}] = \int_0^T dt \mathcal{L}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$.

Für die zu variierende Bahn $\mathbf{r}(t)$, die von der Kugel in der Zeit $0 \leq t \leq T$ durchlaufen wird, soll dabei der Ansatz

$$x(t) = x_0 + v_x t + a t^2, \quad z(t) = z_0 + v_z t + b t^2$$

eingesetzt werden. x_0, z_0, v_x, v_z, a, b sind Konstanten.

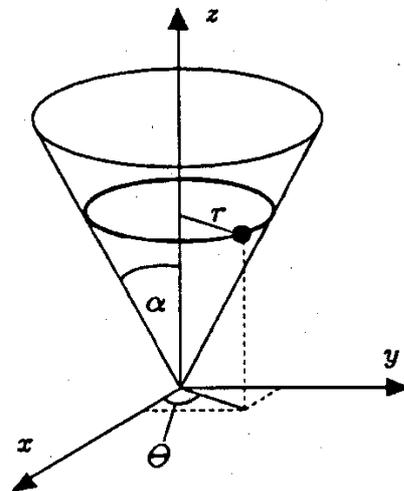
- b) Bestimmen Sie die Konstanten des Ansatzes so, daß S extremalisiert wird. Dabei sind die Endpunkte der Bahn einzusetzen, $x(0) = z(0) = 0, x(T) = x_m, z(T) = 0$.
 Wie lautet also die Bahn, die von der Kugel tatsächlich durchlaufen wird?

Hinweis: Mit den Endpunkten ist $S[\mathbf{r}] = S(a, b) \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0$.

- c) Bestimmen Sie die Lagrangegleichungen und vergleichen Sie deren spezielle Lösung mit dem Ergebnis aus b).

- 2** Ein Teilchen der Masse m rutscht im Schwerfeld der Erde (neg. z -Richtung) auf der klebrigen Innenfläche eines Kegels mit halbem Öffnungswinkel α . Die Reibung wird durch die Rayleighsche Dissipationsfunktion $F = \frac{1}{2}\gamma \dot{\mathbf{r}}^2$ beschrieben.

- a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und die (modifizierten) Lagrangegleichungen für die generalisierten Koordinaten r und θ .



- b) Im Fall ohne Reibung, $\gamma = 0$, ist mit der Winkelbewegung $\theta(t)$ eine Erhaltungsgröße L verbunden. Identifizieren Sie L .

Es sei $\gamma > 0$: Berechnen Sie $L(t)$ mit $L(0) = L_0$.

- c) Es sei eine sehr langsame Radialbewegung $r(t)$ angenommen, d.h., $\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$ in der Bewegungsgleichung für r . Bestimmen und beschreiben Sie $r(t)$ für $\gamma = 0$ und $\gamma > 0$.