1 a) Kugel im Schwerfeld in x - z -Ebene: Lagrange: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$
 Ansatz für die zu variierende Bahn in der Wirkung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t + at^2 & \Rightarrow & \quad \dot{x} = v_x + 2at \\ z(t) &= z_0 + v_z t + bt^2 & \quad \dot{z} &= v_z + 2bt \end{aligned}$$

Das in die Lagrangefunktion einsetzen ergibt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left[\underbrace{(v_x^2 + v_z^2 - 2gz_0)}_{A_0} + \underbrace{(4v_x a + 4v_z b - 2gv_z)}_{A_1} t + \underbrace{(4a^2 + 4b^2 - 2gb)}_{A_2} t^2 \right]$$

Die Wirkung ist dann billigerweise:

$$S = \int_0^T dt \mathcal{L}(x, \dot{x}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m \left[A_0 T + A_1 \frac{T^2}{2} + A_2 \frac{T^3}{3} \right]$$

b) Endpunkte als Randbedingungen: $x(0) = z(0) = 0, x(T) = x_m, z(T) = 0$, daraus folgt für den Ansatz von oben:

$$x_0 = z_0 = 0, \quad v_x = \frac{x_m}{T} - aT, \quad v_z = -bT$$

Jetzt sind nur noch a, b unbestimmt. Die Bahn in S wird also durch a, b festgelegt, und die Bahn in S zu variieren heißt jetzt, a und b zu variieren. S ist extremal, wenn diese Variation verschwindet, also $\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0$. Man muß beim Ableiten beachten, daß v_x und v_z von a, b abhängen, d.h., erst v_x, v_z einsetzen, dann nach a oder b ableiten. Etwas eleganter: Kettenregel benutzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} &= \frac{1}{2}m \left[(2v_x \frac{\partial v_x}{\partial a}) T + (4v_x + 4a \frac{\partial v_x}{\partial a}) \frac{T^2}{2} + (8a) \frac{T^3}{3} \right] \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} &= \frac{1}{2}m \left[(2v_z \frac{\partial v_z}{\partial b}) T + (4v_z + 4b \frac{\partial v_z}{\partial b} - 2g \frac{\partial v_z}{\partial b}) \frac{T^2}{2} + (8b - 2g) \frac{T^3}{3} \right] \end{aligned}$$

Einsetzen von $\frac{\partial v_x}{\partial a} = -T, \frac{\partial v_z}{\partial b} = -T$ und alles ausmultiplizieren und -addieren liefert

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{3}mT^3 a, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{3}mT^3 (b + \frac{1}{2}g)$$

Nullsetzen liefert

$$a = 0, \quad b = -g/2$$

und die physikalische Bahn der Kugel lautet, mit $v_x = x_m/T$, $v_z = gT/2$,

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t = \frac{x_m}{T} t \\ z(t) &= v_z t - \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2} (tT - t^2) \end{aligned}$$

Das so etwas herauskommt, war natürlich schon vorher klar: in x -Richtung: gleichförmige Bewegung, in z -Richtung: freier Fall, kennen wir schon aus Theorie A.

c) Zum Vergleich der 'konventionelle' Weg: Die Bahn, die die Wirkung extremalisiert, wird ja durch die Lagrangegleichungen bestimmt, also:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 & \Rightarrow & x(t) = x_0 + v_x t \\ m\ddot{z} &= -mg & \Rightarrow & z(t) = z_0 + v_z t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (Endpunkte für $t = 0$ und $t = T$) legen die Integrationskonstanten x_0, z_0, v_x, v_z fest, wie in b). Normalerweise hat man als Randbedingungen nicht die Endpunkte der Bahn, sondern die Anfangspunkte $x(0) = 0, z(0) = 0$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}(0) = v_x, \dot{z}(0) = v_z$. Das ist natürlich äquivalent und läßt sich umrechnen in die Wurfzeit T und -weite x_m :

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= v_x = x_m/T \\ \dot{z}(0) &= v_z = gT/2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2v_z}{g}, \quad x_m = \frac{2}{g} v_x v_z$$

2 a) Koordinaten r, θ , der halbe Öffnungswinkel α ist fest:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) & \dot{x} &= \dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) & \Rightarrow \dot{y} &= \dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta) \\ z &= r \cot(\alpha) & \dot{z} &= \dot{r} \cot(\alpha) \end{aligned}$$

kinetische Energie,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2(\alpha)] = \frac{1}{2} m \left[\frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2 \dot{\theta}^2 \right]$$

potentielle Energie, $U = mgz = mgr \cot(\alpha)$, Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left[\frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2 \dot{\theta}^2 \right] - mgr \cot(\alpha)$$

‘Modifizierte’ Lagrangegleichungen: allgemein:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad \text{mit der Rayleigh-Funktion} \quad F = \frac{1}{2} \gamma \dot{\mathbf{r}}^2$$

Hier:

$$F = \frac{1}{2} \gamma \left[\frac{\dot{r}^2}{\sin^2(\alpha)} + r^2 \dot{\theta}^2 \right]$$

Bilden aller Ableitungen von $\mathcal{L}$ und F liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r \dot{\theta}^2 \sin^2(\alpha) - g \sin(\alpha) \cos(\alpha) - \frac{\gamma}{m} \dot{r} \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}) &= -\gamma r^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

b) Für $\gamma = 0$ liefert die 2. Bewegungsgleichung offenbar

$$\frac{d}{dt} L = 0 \quad \text{mit} \quad L = mr^2 \dot{\theta}$$

Mit Reibung $\gamma > 0$ ist die rechte Seite der Bewegungsgleichung nicht mehr null, kann aber durch L dargestellt werden, $\gamma r^2 \dot{\theta} = \frac{\gamma}{m} L$, also ergibt sich eine Bewegungsgleichung für L ,

$$\frac{d}{dt} L(t) = -\frac{\gamma}{m} L(t)$$

Der Drehimpuls L ist bei Reibung keine Erhaltungsgröße mehr.

Die Bewegungsgleichung läßt sich leicht lösen (Trennung der Veränderlichen),

$$\frac{dL}{L} = -\frac{\gamma}{m} dt \Rightarrow \ln(L) - \ln(L_0) = -\frac{\gamma}{m} t \Rightarrow L(t) = L_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right)$$

c) Ohne Reibung, $\gamma = 0$: $r = \text{const.} = r_0$ ist eine spezielle Lösung der Radialgleichung für r ; dies entspricht Kreisbahnen, die durch das Gleichgewicht von Zentrifugal- und Schwerkraft bestimmt sind. Aus $r = r_0 = \text{const.}$ folgt $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, also

$$0 = r \dot{\theta}^2 \sin(\alpha) - g \cos(\alpha) \Rightarrow r \dot{\theta}^2 = g \cot(\alpha)$$

L ist jetzt eine Konstante, $L = L_0 = \text{const.}$, damit wird $\dot{\theta}$ ersetzt: $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$, also

$$\frac{L_0^2}{m^2 r^3} = g \cot(\alpha) \Rightarrow r^3 = r_0^3 = \frac{L_0^2}{m^2 g \cot(\alpha)}$$

Nimmt man mit Reibung $\gamma > 0$ der Einfachheit halber an, daß immer noch $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ näherungsweise gilt, dann wird durch den ‘Zerfall’ des Drehimpulses $L_0 \rightarrow L(t)$ der Radius $r_0 \rightarrow r(t)$ der Kreisbahn ständig kleiner:

$$r^3 = \frac{L(t)^2}{m^2 g \cot(\alpha)} = r_0^3 e^{-2\gamma t/m} \Rightarrow r(t) = r_0 \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{\gamma}{m} t\right)$$