Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **06.06.03**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie B (Mechanik)

$\boxed{1}$ Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im 3-dimensionalen Raum im Potential $U(\mathbf{r}) = \dfrac{a}{|\mathbf{r}|^2}$.

a) Zeigen Sie, daß die Wirkung invariant ist unter der infinitesimalen Transformation

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{r} \quad , \quad t^* = t + \varepsilon 2t \quad , \quad \text{das heißt,} \quad S^* = \int_{t_a^*}^{t_b^*} \mathrm{d}t^* \, \mathcal{L}(\mathbf{r}^*, \dot{\mathbf{r}}^*) = S + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Hinweis: Entwickeln Sie S^* bis $\sim \varepsilon$. Bestimmen Sie $\dot{\mathbf{r}}^* \equiv \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}^*}{\mathrm{d}t^*}$.

b) Geben Sie mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung (Noethertheorem) die zugehörige Erhaltungsgröße Q an. Zeigen Sie für dieses Q, daß $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0$ gilt.

c) Betrachten Sie nun 2 Teilchen der Masse m, die über ein Potential $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ wechselwirken. Zeigen Sie, daß mit der infinitesimalen Galileitransformation

$$\mathbf{r}_1^* = \mathbf{r}_1 - \varepsilon\mathbf{v}t \quad , \quad \mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_2 - \varepsilon\mathbf{v}t \quad , \quad t^* = t \quad , \quad \mathbf{v} = \text{bel. konstanter Vektor},$$

die Wirkung übergeht in $S^* = S + \mathit{const.} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.
Was folgt daraus für die Bewegungsgleichungen für die $\mathbf{r}_i^*$?

$\boxed{2}$ Das mathematische Pendel (eine Masse m hängt an einem masselosen Faden der Länge l im Schwerefeld der Erde) soll durch Ausnutzen der Energieerhaltung gelöst werden. φ ist der Auslenkungswinkel aus der Senkrechten.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$ und die Gesamtenergie $E(\varphi, \dot{\varphi})$ an.
Prüfen Sie nach, daß Energieerhaltung gilt, $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$.

b) $\varphi(t)$ soll nun für eine gegebene Energie $\bar{E}$ berechnet werden, φ sei klein: Schreiben Sie dazu $\bar{E} = E(\varphi, \dot{\varphi})$ in der Form $\dot{\varphi} = u(\varphi)$ und dann $\dfrac{1}{u(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$.
Hinweis: $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$; geeignete Substitution und $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$.

c) Wie lautet also $\varphi(t)$? Wo gehen die Anfangsbedingungen ein?
Geben Sie $\varphi(t)$ an für $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, 13.06.03 bzw. Dienstag, 17.06.03 —