1 a) Lagrangefunktion: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{a}{|\mathbf{r}|^2}$,

Wirkung: $S = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$,

Transformation: $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}(1 + \varepsilon)$, $t^* = t(1 + 2\varepsilon)$,

transformierte Wirkung: $S^* = \int_{t_a^*}^{t_b^*} dt^* \mathcal{L}(\mathbf{r}^*, \dot{\mathbf{r}}^*)$.

Dazu: $\dot{\mathbf{r}}^* \equiv \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*}$,

$$t = \frac{t^*}{1 + 2\varepsilon} \rightarrow \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon}, \quad \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(1 + \varepsilon) \equiv \dot{\mathbf{r}}(1 + \varepsilon) \rightarrow \dot{\mathbf{r}}^* = \dot{\mathbf{r}} \frac{1 + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$$

S^* soll in führender, linearer Ordnung $\sim \varepsilon$ entwickelt werden. Geometrische Reihe:

$$\frac{1 + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} = (1 + \varepsilon)[1 - 2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] = 1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{r}}^* = \dot{\mathbf{r}}(1 - \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \Rightarrow \boxed{(\dot{\mathbf{r}}^*)^2 = (\dot{\mathbf{r}})^2(1 - 2\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}$$

Genauso wird $\mathbf{r}^*$ in das Potential eingesetzt und mit der geometrischen Reihe entwickelt:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}^*|^2} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{1}{1 + 2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} (1 - 2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$$

Damit ergibt die Lagrangefunktion in S^* :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}^*, \dot{\mathbf{r}}^*) = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) (1 - 2\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Wirkung S^* : Substitution der Integrationsvariable $t^* \rightarrow t$,

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) (1 - 2\varepsilon), \quad \frac{dt^*}{dt} = 1 + 2\varepsilon \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) (1 + 2\varepsilon)(1 - 2\varepsilon) \\ &= S(1 - 4\varepsilon^2) = S + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Die führende Korrektur zu S ist also $\sim \varepsilon^2$, in linearer Ordnung sind S und S^* identisch.

b) Das Resultat $S^* = S + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ kann auch ausgedrückt werden durch $\left. \frac{dS^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$. Daraus wurde in der Vorlesung abgeleitet, daß eine Erhaltungsgröße existiert (Noethertheorem), und zwar

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \underbrace{\left(\mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right)}_{= -\mathcal{H}} \varphi = const., \quad i = x, y, z$$

Der Ausdruck in den Klammern ist offenbar $(-)$ die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$. Die infinitesimale Transformation ist dabei allgemein definiert als

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \psi_i, \quad t^* = t + \varepsilon \varphi$$

In unserem Fall gilt also $\psi_i = x_i, \varphi = 2t$, und so

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i, \quad \mathcal{H} = \sum_i m \dot{x}_i^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{a}{|\mathbf{r}|^2} \equiv \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E, \quad \text{Energie}$$

das heißt, $\boxed{Q = m \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r} - 2Et}$. Ist Q tatsächlich erhalten ?!

$$\frac{dQ}{dt} = m \ddot{\mathbf{r}} \mathbf{r} + m (\dot{\mathbf{r}})^2 - 2E - 2t \frac{dE}{dt}$$

Dazu brauchen wir die Bewegungsgleichung,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{a}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2a\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^4} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

Damit folgt

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} [m \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}(\mathbf{r})] = 0$$

Das war eh klar, Energieerhaltung. Die Konstanz von Q ist aber weniger selbstverständlich, diese hängt nämlich an der speziellen Form des Potentials $U(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= m \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} + m \dot{\mathbf{r}}^2 - 2E \\ &= m \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} - 2U(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathbf{r} - 2U(\mathbf{r}) \\ &= \frac{2a\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^4} \mathbf{r} - 2 \frac{a}{|\mathbf{r}|^2} = 0 \end{aligned}$$

c) 2 Teilchen, Lagrangefunktion: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$,

Transformation: $\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i - \varepsilon \mathbf{v} t$, $\mathbf{v}$ = beliebiger, konstanter Vektor; $i = 1, 2$,

Transformierte Wirkung: $S^* = \int_{t_a^*}^{t_b^*} dt^* \mathcal{L}(\mathbf{r}_i^*, \dot{\mathbf{r}}_i^*)$,

Dazu brauchen wir wieder $dt^* = dt$, $\dot{\mathbf{r}}_i^* \equiv \frac{d\mathbf{r}_i^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{r}_i^*}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i - \varepsilon \mathbf{v}$,
also ist die transformierte Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}_i^*, \dot{\mathbf{r}}_i^*) &= \frac{1}{2} m [(\dot{\mathbf{r}}_1 - \varepsilon \mathbf{v})^2 + (\dot{\mathbf{r}}_2 - \varepsilon \mathbf{v})^2] - U(\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}_2^*) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \varepsilon m \mathbf{v} (\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) + \varepsilon \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}_i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

mit $f = -m\mathbf{v}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$.

Die Lagrangefunktion ändert sich also um die totale Zeitableitung einer Funktion f , und für die transformierte Wirkung ergibt sich mit $dt^* = dt$,

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) + \varepsilon \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{df}{dt} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= S + \varepsilon \underbrace{(f|_{t_b} - f|_{t_a})}_{= \text{const.}} \end{aligned}$$

Die Galileitransformation läßt also die Wirkung in linearer Ordnung $\sim \varepsilon$ *nicht* invariant, allerdings besteht die Änderung lediglich aus einer Konstanten. Die Lagrangegleichungen für $\mathbf{r}_i^*$ entsprechen daher denen für die $\mathbf{r}_i$, denn die Variation der Wirkung unter einer infinitesimalen Veränderung der Bahn bei festgehaltenen Endpunkten ist gleich,

$$\delta S^* = \delta S = 0$$

2 a) Angenommen, das Pendel schwingt in der x - y -Ebene, y zeigt nach unten (Richtung der Schwerkraft), dann ist $x = l \sin(\varphi)$, $y = l \cos(\varphi)$, und die kinetische Energie lautet (wie üblich) $T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2$. Die potentielle Energie ist $U(\varphi) = mgh = -mgl \cos(\varphi)$. Damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) &= T - U = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 - U(\varphi) \\ E(\varphi, \dot{\varphi}) &= T + U = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi})^2 + U(\varphi) \end{aligned}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{dE}{dt} = ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \left[ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] \dot{\varphi}$$

Mit der Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

folgt sofort $\frac{dE}{dt} = 0$.

b) Da die Gesamtenergie erhalten ist, können wir diese auf einen willkürlichen festen Wert $\bar{E}$ setzen und nach $\dot{\varphi}$ auflösen:

$$\bar{E} = E(\varphi, \dot{\varphi}) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2(\bar{E} - U(\varphi))}{ml^2}}$$

Trennung der Veränderlichen und Integration beider Seiten,

$$d\varphi = \sqrt{\frac{2(\bar{E} - U(\varphi))}{ml^2}} dt \quad \Longrightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{ml^2}{2(\bar{E} - U(\varphi))}} d\varphi \quad \Longrightarrow \quad t - t_0 = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\bar{E} - U(\varphi)}}$$

Für kleine Auslenkungen mit $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ wird das Potential

$$U(\varphi) \approx \frac{1}{2}mgl \varphi^2 - mgl$$

und wir müssen das Integral

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\bar{E} + mgl) - \frac{1}{2}mgl \varphi^2}}$$

berechnen. Die Konstante mgl kann als Bezugsenergie in $\bar{E}$ absorbiert werden, $(\bar{E} + mgl) \rightarrow \bar{E}$ (d.h., wir messen $\bar{E}$ relativ zu $-mgl$; wir hätten auch schon am Anfang einen entsprechenden Bezugspunkt im Potential wählen können). Das Integral lautet dann

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{ml^2}{2\bar{E}}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{mgl}{2\bar{E}} \varphi^2}}$$

Mit der Substitution $x = \sqrt{\frac{mgl}{2\bar{E}}} \varphi$ wird daraus

$$\omega_0 (t - t_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(x) - C = \arcsin\left(\sqrt{\frac{mgl}{2\bar{E}}} \varphi\right) - C \quad \text{mit} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Die beiden Integrationskonstanten t_0 und C können zusammengefaßt werden, $\psi := \omega_0 t_0 - C$,

$$\boxed{\varphi(t) = \sqrt{\frac{2\bar{E}}{mgl}} \sin(\omega_0 t - \psi)}$$

Für die Energie $\bar{E}$ wurde wieder E geschrieben.

c) Das $\varphi(t)$ von oben entspricht der allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (Lagrangegleichung) $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$. Die Anfangsbedingungen $\varphi(0)$ und $\dot{\varphi}(0)$ stecken hier in der Integrationskonstanten ψ und der (ebenfalls konstanten) Erhaltungsgröße E :

$$\varphi(0) = -\sqrt{\frac{2E}{mgl}} \sin(\psi) \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{2E}{mgl}} \omega_0 \cos(\psi)$$

Mit diesen zwei Gleichungen können die Anfangsbedingungen in ψ und E umgerechnet werden und umgekehrt. Beispiel:

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \psi = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = \Omega_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{mgl}} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$