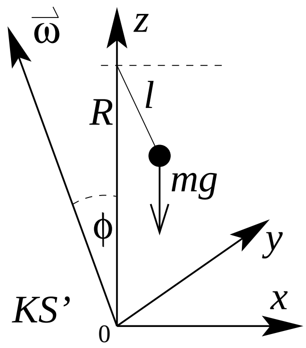
Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **13.06.03**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

Übungsblatt Nr. 7 zur Theorie B (Mechanik)

1 Auf der Erdoberfläche (Erdradius R) ist ein Fadenpendel (Fadenlänge l, Masse m) angebracht. Im rotierenden Koordinatensystem KS' zeigt die Schwerkraft in negative z-Richtung. Die Drehachse Süpol–Nordpol $\boldsymbol{w}$ nimmt in KS' einen Winkel ϕ zur z-Achse ein. Die Erde rotiert mit $\omega = |\boldsymbol{w}| = \frac{2\pi}{24\,h}$. Die Koordinaten in KS' seien $\mathbf{r} = (x, y, z)$.



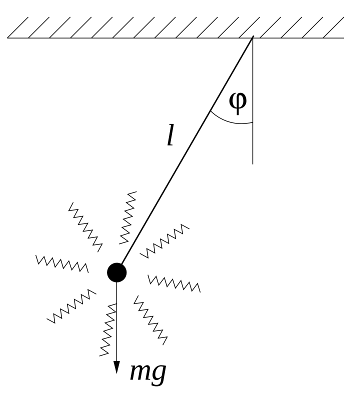
a) Zunächst sei $\omega = 0$. Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen lauten: $\ddot{x}+\omega_0^2 x = 0\,, \ddot{y}+\omega_0^2 y = 0$.

b) Reproduzieren Sie die bekannte Lösung dieser Gleichungen, indem Sie eine einzige DGL für die komplexe Variable $u = x + iy$ bilden und deren allgemeine Lösung über den Ansatz $u = e^{i\Omega t}$ berechnen. Bestimmen Sie daraus $x(t), y(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0\,, y(0) = y_0\,, \dot{y}(0) = 0$. Wie verhält sich die Schwingungsebene des Pendels?

c) Nun ist $\omega > 0$: Geben Sie die Bewegungsgleichung für $\mathbf{r}$ im rotierenden System KS' an (Vorlesung). Begründen Sie, daß die Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_Z$ gegenüber der Corioliskraft $\mathbf{F}_C$ vernachlässigt werden kann, $|\mathbf{F}_Z| \ll |\mathbf{F}_C|$, weil $\omega \ll \omega_0$.

d) Zeigen Sie, daß die Gleichungen in der x-y-Ebene für $\mathbf{F}_Z = 0$ die Form $\ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega_z \dot{y} = 0\,, \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega_z \dot{x} = 0$ annehmen. Lösen Sie diese mit der Methode aus b) für die Anfangsbedingungen aus b), wobei $\omega \ll \omega_0$. Das Ergebnis lautet $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}(t)\cos(\omega_0\, t)$. Wie verhält sich die Schwingungsebene des Pendels?

2 Ein Koffer mit hochradioaktivem Material hängt an einem Seil fester Länge l. Das System wird als ein ebenes mathematisches Pendel im Schwerefeld der Erde betrachtet, dessen Punktmasse m exponentiell zerfällt, $m = m(t) = m_0\, e^{-2\gamma t}$, $\gamma > 0$.



a) Geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ an, und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Winkel.

b) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung, für $\gamma = \sqrt{\frac{g}{2l}}$. Wie lautet $\varphi(t)$ für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0\,,\ \dot{\varphi}(0) = \Omega_0$?
Hinweis: Lösungsansatz: $\varphi(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda =$komplex.

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, 20.06.03 bzw. Dienstag, 24.06.03 —