1 a) Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\theta) \quad , \quad U(\theta) = mgz = -mgl \cos(\theta) + const.$$

θ ist der Auslenkungswinkel. Mit dem Winkel φ der Projektion in die x - y -Ebene sind die Koordinaten, siehe auch Blatt 2, Aufg. 1,

$$x = l \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = l \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = R - l \cos(\theta)$$

Wir suchen die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten, müssen also $U(\theta)$ wieder rückübersetzen. Für kleine Auslenkungen geht das leicht: *in führender Ordnung* θ sind mit $\cos(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots$ und $\sin(\theta) = \theta + \dots$ das Potential und die Koordinaten

$$x = l\theta \cos(\varphi)$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + const.' \quad , \quad y = l\theta \sin(\varphi)$$

$$z = R - l$$

also $x^2 + y^2 = l^2\theta^2$, und damit $U(\theta) = U(x, y) = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2)$. Mit $z = const.$, also $\dot{z} = 0$ folgt

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2)} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

In führender Ordnung θ sind x und y offenbar entkoppelt, und man erhält direkt zwei unabhängige Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators,

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned}}$$

b) Wir benutzen die komplexe Koordinate $u = x + iy$, um aus den zwei DGLs eine einzige zu machen:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ i\ddot{y} + i\omega_0^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ addieren} \Rightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Ansatz: $u(t) = e^{i\Omega t} \rightarrow \ddot{u} = -\Omega^2 e^{i\Omega t} \Rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\Omega = \pm\omega_0}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

mit den komplexen Konstanten A, B .

Mit $x = \operatorname{Re}(u)$ und $y = \operatorname{Im}(u)$ könnte man die allgemeinen x und y extrahieren. Einfacher: erst die Anfangsbedingungen einbauen:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0) = iy_0, \dot{u}(0) = 0$$

also

$$iy_0 = A + B, \quad 0 = i\omega_0(A - B) \quad \Rightarrow \quad A = B = iy_0/2$$

Damit ergibt sich zunächst

$$u(t) = i\frac{y_0}{2}[e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] = iy_0 \cos(\omega_0 t)$$

und daraus

$$\boxed{x(t) = 0, \quad y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t)}$$

Die Schwingungsebene (=Schwingungsrichtung in der x - y -Ebene) ist die durch die Anfangsbedingung vorgegebene, ist also zeitlich konstant. Klar, denn x und y sind ja (in der Näherung kleiner Auslenkung) entkoppelt.

c) Im rotierenden System KS' ist die Bewegungsgleichung laut Vorlesung (mit der Notation $\mathbf{r}$ anstatt $\mathbf{r}'$)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{\mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{F}_C} - \underbrace{m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{F}_Z} - \underbrace{m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r})}_{= 0 \text{ hier}}$$

Abschätzen der Größenordnung:

$|\mathbf{F}_C| = 2m\omega v |\sin(\angle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})|$; v = Geschwindigkeit der Masse. Größenordnungsmäßig können wir für v die Geschw. am Scheitelpunkt nehmen, also $v \simeq l\dot{\theta}_{max}$. $\dot{\theta}_{max}$ ist bis auf Vorfaktoren, die von den Anfangsbedingungen abhängen, gegeben durch $\dot{\theta}_{max} \simeq \omega_0$. Damit ist, bis auf Vorfaktoren der Größenordnung 1, mit $\omega_0^2 = g/l$,

$$|\mathbf{F}_C| \simeq ml\omega\omega_0 = mg\frac{\omega}{\omega_0}$$

In $\mathbf{F}_Z$ gilt $|\mathbf{r}| = R$, da $l \ll R$, und so $|\mathbf{F}_Z| = m|\sin(\angle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})|R\omega^2$, also bis auf Vorfaktoren der Größenordnung 1,

$$|\mathbf{F}_Z| \simeq mR\omega^2 = mR\omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = mg\frac{R}{l} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Es sieht so aus, daß die Zentrifugalkraft um den Faktor (Pendelperiode/Tag) kleiner ist als die Corioliskraft und vernachlässigt werden kann. Allerdings sind die Vorfaktoren nicht gleich, der Faktor R/l ist groß und kann möglicherweise ein ω/ω_0 kompensieren.

Hier müßte man Zahlenwerte einsetzen, denn l läßt sich zwar mit ω_0 und g verbinden, aber R nicht mit ω , denn ω ist durch eine "zufällige" Anfangsbedingung gegeben (die Rotationsenergie bei Entstehung der Erde etc.).

Das übliche Argument ist: Wir berücksichtigen ω nur in führender Ordnung ω in der Bewegungsgleichung und vernachlässigen alle Terme ab $\sim \omega^2$.

d) Im System KS' sind die Komponenten der Drehachse:

$$\omega_x = \omega \sin(\phi) \cos(\Theta), \quad \omega_y = \omega \sin(\phi) \sin(\Theta), \quad \omega_z = \omega \cos(\phi)$$

Θ ist der Winkel der Projektion von $\mathbf{w}$ in die x - y -Ebene. O.B.d.A. kann man $\Theta = 0$ setzen.

Die Komponenten der Corioliskraft lauten

$$\mathbf{w} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z \dot{y} \\ \omega_z \dot{x} \\ \omega_x \dot{y} - \omega_y \dot{x} \end{pmatrix}$$

mit $z = \text{const.}$, also $\dot{z} = 0$. Für x und y ergeben sich also die Bewegungsgleichungen, mit $\mathbf{F}_Z = 0$,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + 2m\omega_z \dot{y} \\ m\ddot{y} &= F_y - 2m\omega_z \dot{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega_z \dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega_z \dot{x} &= 0 \end{aligned}}$$

mit der rücktreibenden Kraft im rotierenden System $F_x = -m\omega_0^2 x$, $F_y = -m\omega_0^2 y$ aus a).

Die Gleichungen sind die aus a), aber mit zusätzlichen Kopplungstermen zwischen x und y . Jetzt ist die in a) (überflüssigerweise) benutzte Methode hilfreich: Mit $u = x + iy$ ist

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega_z \dot{y} &= 0 \\ i\ddot{y} + i\omega_0^2 y + i2\omega_z \dot{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ addieren } \Rightarrow (\ddot{x} + i\ddot{y}) + \omega_0^2(x + iy) + i2\omega_z(\dot{x} + i\dot{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u + 2i\omega_z \dot{u} = 0$$

Jetzt haben wir also nur noch eine Gleichung, die aussieht wie ein gedämpfter Oszillator, aber mit imaginärer (!) Dämpfungskonstante.

Ansatz: $u = e^{i\Omega t}$, $\dot{u} = i\Omega e^{i\Omega t}$, $\ddot{u} = -\Omega^2 e^{i\Omega t}$,

$$\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\omega_z \Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = -\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2} \simeq -\omega_z \pm \omega_0 + \mathcal{O}((\omega_z/\omega_0)^2)}$$

wobei in führender Ordnung ω/ω_0 , also ω_z/ω_0 entwickelt wurde. Allgemeine Lösung für $\omega \ll \omega_0$,

$$u(t) = e^{-i\omega_z t} [Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}]$$

Mit den Anfangsbedingungen wie in a), $u(0) = iy_0$, $\dot{u}(0) = 0$,

$$A + B = iy_0, \quad A - B = iy_0 \frac{\omega_z}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad A = i \frac{y_0}{2} \left(1 + \frac{\omega_z}{\omega_0}\right), \quad B = i \frac{y_0}{2} \left(1 - \frac{\omega_z}{\omega_0}\right)$$

In führender Ordnung ω_z/ω_0 ergibt sich $A = B = i \frac{y_0}{2}$, und damit

$$u(t) = iy_0 e^{-i\omega_z t} \cos(\omega_0 t) = y_0 [i \cos(\omega_z t) + \sin(\omega_z t)] \cos(\omega_0 t)$$

also

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\omega_z t) \\ \cos(\omega_z t) \end{pmatrix} y_0 \cos(\omega_0 t)}$$

Die Schwingungsebene dreht sich also mit der Frequenz $\omega_z = \omega \cos(\phi)$.

2 a) Lagrangefunktion: Kinetische Energie:

$$x = l \sin(\varphi), \quad y = l \cos(\varphi), \quad \dot{x} = l \dot{\varphi} \cos(\varphi), \quad \dot{y} = -l \dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi})^2$$

Potential: $U = -mgl \cos(\varphi) + \text{const.}$,

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi})^2 + mgl \cos(\varphi) \quad \text{mit} \quad m = m(t) = m_0 e^{-2\gamma t}$$

$$\text{Bewegungsgleichung: } \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\varphi}) = -mgl \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow m l^2 \ddot{\varphi} + \dot{m} l^2 \dot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0$$

Mit $\dot{m} = -2\gamma m$ und $\sin(\varphi) \approx \varphi$ ergibt sich

$$\ddot{\varphi} - 2\gamma \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

b) Lösungsansatz, wie immer:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 - 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\text{Hier: } \gamma = \sqrt{\frac{g}{2l}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}(1+i), \quad \lambda_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } \varphi(t) = e^{\omega_0 t / \sqrt{2}} (A e^{i\omega_0 t / \sqrt{2}} + B e^{-i\omega_0 t / \sqrt{2}})$$

Die Integrationskonstanten A, B sind komplex, wie φ .

Physikalische Lösung durch Bilden des Realteils:

$$\text{Re}\varphi(t) = e^{\omega_0 t / \sqrt{2}} [a \sin(\omega_0 t / \sqrt{2}) + b \cos(\omega_0 t / \sqrt{2})]$$

a, b sind reell, genauer: $b = (\text{Re}A + \text{Re}B)$, $a = (-\text{Im}A + \text{Im}B)$.

Anfangsbedingungen: (wir setzen jetzt $\varphi = \text{Re}\varphi$)

$$\varphi(0) = b = 0$$

$$\text{und: } \dot{\varphi}(0) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} a = \Omega_0 \Rightarrow a = \sqrt{2} \frac{\Omega_0}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \sqrt{2} \frac{\Omega_0}{\omega_0} e^{\omega_0 t / \sqrt{2}} \sin(\omega_0 t / \sqrt{2})$$

Billigerweise ein Sinus, dessen Hüllkurve exponentiell ansteigt (solange φ klein bleibt, das war die Näherung).