1 a) Trägheitstensor für N Massepunkte: $\Theta_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n [(\mathbf{r}^n)^2 \delta_{i,j} - x_i^n x_j^n]$

Diagonalelemente: $\Theta_{ii} = \sum_{n=1}^N m_n [(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + (x_3^n)^2 - (x_i^n)^2]$

Außerdiagonalelemente: $\Theta_{ij}|_{i \neq j} = - \sum_{n=1}^N m_n [x_i^n x_j^n]$

Hier:

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_{xx} = (m+M)a^2 \\ \Theta_{yy} = (m+M)a^2 \\ \Theta_{zz} = 2(m+M)a^2 \\ \Theta_{xy} = \Theta_{yx} = -Ma^2 \\ \Theta_{xz} = \Theta_{yz} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Theta = \begin{pmatrix} (m+M)a^2 & -Ma^2 & 0 \\ -Ma^2 & (m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m+M)a^2 \end{pmatrix}$$

b) Eigenvektoren: $\Theta \mathbf{e}'_i = \Theta_i \mathbf{e}'_i \Rightarrow (\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) \mathbf{e}'_i = 0$

Eigenwerte:

$$\det(\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow (2(m+M)a^2 - \Theta_i) [(m+M)a^2 - \Theta_i]^2 - (Ma^2)^2 = 0$$

daraus folgt

$$\boxed{\Theta_3 = 2(m+M)a^2} \quad \text{und} \quad ((m+M)a^2 - \Theta_i)^2 - (Ma^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_1 = ma^2, \quad \Theta_2 = (m+2M)a^2}$$

Zugehöriger Eigenvektor: $\Theta_3 = 2(m+M)a^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{array}{l} -(m+M)b_x - Mb_y = 0 \\ -Mb_x - (m+M)b_y = 0 \\ 0b_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_x = b_y = 0 \\ b_z = \text{beliebig} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_3 = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_3 \equiv b_z$.

Zugehöriger Eigenvektor: $\Theta_1 = ma^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{array}{l} Mb_x - Mb_y = 0 \\ -Mb_x + Mb_y = 0 \\ (m+2M)b_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_x = b_y \\ b_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_1 \equiv b_y$.

Zugehöriger Eigenvektor: $\Theta_2 = (m + 2M)a^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{array}{l} -Mb_x - Mb_y = 0 \\ -Mb_x - Mb_y = 0 \\ mb_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_x = -b_y \\ b_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_2 \equiv b_y$.

Die Konstanten c_i werden jetzt so bestimmt, daß die Eigenvektoren normiert sind (Einheitsvektoren), $|\mathbf{e}'_i| = 1$, und es ergibt sich schließlich

$\Theta_1 = ma^2$	$\Theta_2 = (m + 2M)a^2$	$\Theta_3 = (2m + 2M)a^2$
$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Benennung der Θ_i und zugehörigen $\mathbf{e}'_i$ (welcher also der 1., 2., oder 3. Eigenvektor sein soll) ist natürlich willkürlich. Mit der hier benutzten Benennung bilden die Hauptachsen in der Reihenfolge $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ ein rechtshändiges Bezugssystem. Siehe auch die nichtvorhandene Skizze.

c) Die Transformationsmatrix in $\mathbf{e}'_i = \Lambda \mathbf{e}_i$ lautet

$\Lambda = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
--

Die Matrix ist orthogonal, denn die Spalten sind paarweise orthogonal (sogar orthonormal), $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = \delta_{i,j}$.

Die Komponenten Θ'_{ij} des Trägheitstensors in der neuen Basis sind

$$\Theta'_{ij} = (\Lambda^{-1} \Theta \Lambda)_{ij} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}_{ij}$$

Die Matrix Θ wird durch die Ähnlichkeitstransformation Λ ja gerade diagonalisiert. Davon kann man sich notfalls durch Ausmultiplizieren von $\Theta' = \Lambda^{-1} \Theta \Lambda$ überzeugen.

d) Schwerpunkt im "alten" Koordinatensystem:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = \frac{1}{3m + M} \left[ma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Ma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{(m + M)a}{3m + M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \mathbf{e}'_1$$

Wenn nun das Hauptachsensystem $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ in Richtung $\mathbf{e}'_1$ auf den Schwerpunkt verschoben wird, werden die Drehachsen $\mathbf{e}'_2$ und $\mathbf{e}'_3$ jeweils um $|\mathbf{R}|$ parallel verschoben, $\mathbf{e}'_1$ dagegen bleibt unverändert. Der Satz von Steiner, rückwärts angewendet, führt dann auf

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_1 &= \Theta_1 \\ \tilde{\Theta}_2 &= \Theta_2 - M_{tot}|\mathbf{R}|^2, \quad M_{tot} = 3m + M \\ \tilde{\Theta}_3 &= \Theta_3 - M_{tot}|\mathbf{R}|^2\end{aligned}$$

Um das Ergebnis einfach nachprüfbar zu halten, vereinfachen wir auf $M = m$, dann gilt

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{R}|^2 = \frac{a^2}{2}, \quad M_{tot} = 4m$$

also

$$\boxed{\tilde{\Theta}_1 = ma^2, \quad \tilde{\Theta}_2 = ma^2, \quad \tilde{\Theta}_3 = 2ma^2}$$

Dies ergibt sich natürlich auch direkt, wenn man $M = m$ setzt und die Θ'_{ij} berechnet; also bezüglich eines Koordinatensystems, dessen x und y -Achsen durch die Ecken des Quadrats aus den 4 Massen m gehen, mit dem Ursprung in der Mitte (Schwerpunkt).

2 a) Der Vektor ist in IS bestimmt durch $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ mit

$$\begin{aligned}A_x &= A_{\perp} \cos(\theta) & A_{\perp} &= |\mathbf{A}| \sin(\Phi) \\ A_y &= A_{\perp} \sin(\theta) & A_{\parallel} &= |\mathbf{A}| \cos(\Phi) \\ A_z &= A_{\parallel}\end{aligned}$$

Hier ist $A_{\perp}$ die Länge der Projektion in die x - y -Ebene, θ der Winkel dieser Projektion zur x -Achse, $A_{\parallel}$ die Projektion auf die z -Achse. Die Winkel θ, Φ sind fest gewählt und völlig unabhängig von dem zeitabhängigen Rotationswinkel $\varphi = \omega t$. Wird nun dieser Vektor von einem Bezugssystem KS' aus betrachtet, das gegenüber IS um den Winkel φ um die gemeinsame z -Achse gedreht ist, so erscheint die Projektion in die x - y -Ebene in KS' um den Winkel φ zurückgedreht,

$$\begin{aligned}A'_x &= A_{\perp} \cos(\theta - \varphi) = A_{\perp} [\cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)] = A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi) \\ A'_y &= A_{\perp} \sin(\theta - \varphi) = A_{\perp} [\sin(\theta) \cos(\varphi) - \cos(\theta) \sin(\varphi)] = -A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi) \\ A'_z &= A_z = A_z\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise

$$\boxed{\mathbf{A}' = D \mathbf{A}, \quad D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

D ist (wie erwartet) die Matrix einer Drehung um die z -Achse um den Winkel $-\varphi$.

b) Im System IS : $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$

Im System KS' : aus a) folgt: $\mathbf{r}' = D\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} = D^{-1}\mathbf{r}'$

Das braucht man jetzt nur ableiten:

$$\dot{\mathbf{r}} = (d_t D^{-1})\mathbf{r}' + D^{-1}\dot{\mathbf{r}}'$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (d_t^2 D^{-1})\mathbf{r}' + 2(d_t D^{-1})\dot{\mathbf{r}}' + D^{-1}\ddot{\mathbf{r}}'$$

Dazu, mit $D^{-1} = D^T$, denn D ist orthogonal,

$$(d_t D^T) = d_t \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ -\cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d_t^2 D^T) = -\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen und Anmultiplizieren von m und D liefert mit $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$,

$$\begin{aligned} \underbrace{(D\mathbf{F})}_{=\mathbf{F}'} &= -m\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}' - \\ &\quad - 2m\omega \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ -\cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}' \\ &\quad + m(D D^{-1})\ddot{\mathbf{r}}' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}' = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}' - 2m\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}' + m\ddot{\mathbf{r}}'$$

Einsetzen der Komponenten von $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ liefert die Bewegungsgleichung in KS' ,

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}' = \underbrace{\mathbf{F}' + m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_Z} + \underbrace{2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_C}}$$

Die Scheinkräfte wirken nur in der x - y -Ebene senkrecht zur Drehachse $\mathbf{e}_z$.

Vergleich mit der Vorlesung: dort hieß es

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' + \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}_{\mathbf{F}_Z} + \underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')}_{\mathbf{F}_C}$$

Hier ist die Drehachse im System KS' die z' -Achse, $\boldsymbol{w} = \omega \mathbf{e}_z$, also

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_Z &= -m\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_C &= -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} = -2m\omega \begin{pmatrix} -\dot{y}' \\ \dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dies ergibt genau die Bew.gl. von oben.