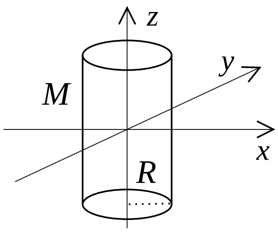
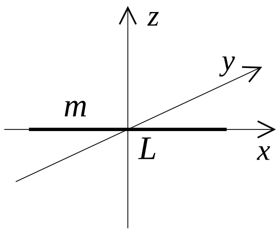
Universität Karlsruhe SS 2003
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann **04.07.03**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre janbri@tkm.uni-karlsruhe.de / Physikhochh. Zi. 10.13

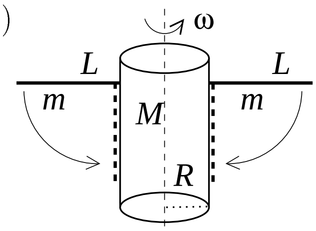
Übungsblatt Nr. 10 zur Theorie B (Mechanik)

1 **a)** Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ_{zz} bezüglich der körperfesten z-Achse (wie unten abgebildet) für
(i) einen homogenen Zylinder der Masse M mit Radius R,
(ii) einen unendlichen dünnen homogenen Stab der Masse m mit Länge L.

b) Aus einem solchen Zylinder und 2 Stäben wird nun ein Eiskunstläufer mit ausgestreckten Armen zusammengesetzt, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die eigene z-Achse dreht.
Mit welcher Winkelgeschw. ω' wird er sich drehen, wenn er die Arme an den Körper anlegt? Geben Sie ω'/ω als Funktion von m/M und L/R an, sowie den Zahlenwert für $R = 20\,\text{cm}$, $M = 70\,\text{kg}$, $L = 70\,\text{cm}$, $m = 4.5\,\text{kg}$.

a) (i)


a) (ii)


b)


2 **a)** Der Drehimpuls $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ eines starren Körpers genügt im raumfesten Laborsystem $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ der Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \quad , \quad \text{das Drehmoment sei von der Form} \quad \mathbf{M} = M_0 \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} \right)$$

Zeigen Sie, ohne die Gleichung zu lösen, daß daraus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_z = 0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\mathbf{L}|^2 = 0$ folgt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $L_x(t), L_y(t)$ mit $L_z = L_0 \cos(\theta_0)$.
Welche Bewegung führt $\mathbf{L}(t)$ aus?

c) Der starre Körper sei nun die Erde, mit Hauptträgheitsachsen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ und -momenten $\Theta_1 = \Theta_2, \Theta_3 \neq \Theta_1$. Der Abstandsvektor $\mathbf{R}$ Erde–Sonne ist $\| \mathbf{e}_x$, die $\mathbf{e}_3$-Achse ist die Süd–Nord-Achse der Erde und um $\theta_0 = 23.5^o$ gegen $\mathbf{e}_z$ geneigt. (Siehe Skizze auf der Rückseite.)
Das Drehmoment, das die Sonne auf die Erde ausübt, ist näherungsweise gegeben durch

$$\mathbf{M} = \alpha \int \mathrm{d}^3 r \, \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}\mathbf{R}) (\mathbf{r} \times \mathbf{R}) \quad , \quad \alpha = \frac{3 G m_S}{|\mathbf{R}|^5} \quad , \quad \rho(\mathbf{r}) = \text{Massendichte der Erde.}$$

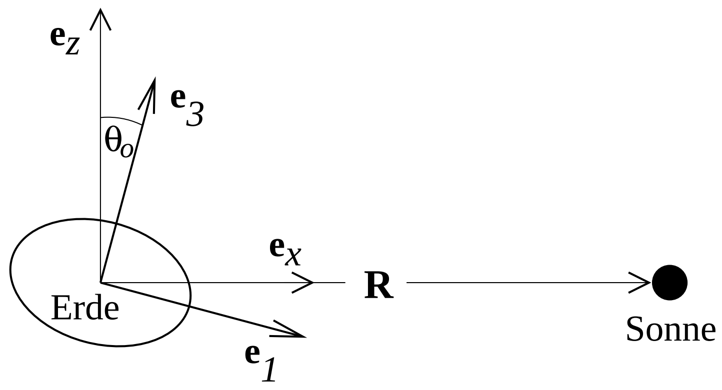
Zeigen Sie, daß man für das über einen Sonnenumlauf gemittelte Drehmoment erhält:

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \alpha \frac{1}{2} |\mathbf{R}|^2 (\Theta_3 - \Theta_1) \cos(\theta_0) \, (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_z)$$

— **bitte wenden** —

Hinweis: Führen Sie die Integration über $\mathbf{r}$ im körperfesten System $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ aus. Zeigen Sie dazu, daß (mit $\Omega = 2\pi/\text{Jahr}$)
$(\mathbf{Re}_1, \mathbf{Re}_2, \mathbf{Re}_3) = |\mathbf{R}|(\cos(\theta_0)\cos(\Omega t), -\sin(\Omega t), \sin(\theta_0)\cos(\Omega t))$.

d) Sie können jetzt das Ergebnis aus b) anwenden. Nehmen Sie an, daß $\mathbf{L} = L_0\,\mathbf{e}_3$ (was bedeutet das?), und berechnen Sie die Präzessionsperiode der Erdachse unter dem Einfluß von Sonne *und* Mond. Diese sollen sich in einer Ebene bewegen und die Parameter sind: Sonne: $G = 6.7 \cdot 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$, $|\mathbf{R}| = 1.5 \cdot 10^{11}\text{m}$, $m_S = 2 \cdot 10^{30}\text{kg}$, Mond: $|\mathbf{R}| = 3.8 \cdot 10^8\text{m}$, $m = 7 \cdot 10^{22}\text{kg}$, Erde: $(\Theta_3 - \Theta_1)/\Theta_3 \simeq 1/300$.



— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, 11.07.03 bzw. Dienstag, 15.07.03 —