1 a) Trägheitstensor für eine kontinuierliche Masseverteilung $\rho(\mathbf{r})$:

$$\Theta_{ij} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{i,j} - x_i x_j]$$

(i) Zylinder:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} M/V & \text{für } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \text{ und } 0 < z \leq h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

h ist die Ausdehnung in z -Richtung. In Zylinderkoordinaten (r, ϑ, φ) ergibt sich damit

$$\Theta_{zz} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) [\underbrace{x^2 + y^2}_{= r^2}] = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \frac{M}{V} r^2 = 2\pi h \frac{M}{V} \frac{R^4}{4}$$

Das Volumen des Zylinders ist

$$V = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = 2\pi h \frac{R^2}{2}$$

und damit kürzt sich h wieder raus,

$$\boxed{\Theta_{zz} = \frac{1}{2} M R^2}$$

(ii) Stab der Länge L :

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{m}{L} \delta(y) \delta(z) & \text{für } |x| \leq L/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist

$$\Theta_{zz} = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx x^2 \int dy \delta(y) \int dz \delta(z) = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Theta_{zz} = \frac{m L^2}{12}}$$

b) Trägheitsmoment mit ausgestreckten "Armen": Dazu muß berücksichtigt werden, daß die Stäbe nicht um den Schwerpunkt rotieren, sondern um eine parallel verschobene Achse mit dem Abstand $(R + L/2)$ zum Schwerpunkt. Steiner:

$$\Theta_{zz}^A = \frac{m L^2}{12} + m(R + L/2)^2 = m\left(\frac{L^2}{3} + R^2 + RL\right)$$

Ein Zylinder plus 2 Stäbe ergibt schließlich

$$\Theta_{zz}^{tot} = \Theta_{zz}^{Zyl} + 2\Theta_{zz}^A = \frac{1}{2}MR^2 + 2m\left(\frac{L^2}{3} + R^2 + RL\right)$$

Trägheitsmoment mit angelegten "Armen": Das Trägheitsmoment des Stabes ist jetzt null, $\Theta_{xx}^{Stab} = 0$, also bleibt nur der Beitrag von Steiner übrig (wie für eine Punktmasse),

$$\Theta_{zz}^A = 0 + mR^2 \quad \Rightarrow \quad \Theta_{zz}^{tot} = \frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2$$

Das Verhältnis ω'/ω der Kreisfrequenzen ergibt sich aus der Drehimpulserhaltung (die Rotationsachse ist eine Hauptträgheitsachse des Eisläufers, daher ist $L_z = |\mathbf{L}| \equiv L$),

$$L = \omega \Theta_{zz}^{tot} = \omega' \Theta_{zz}^{\prime tot} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\Theta_{zz}^{tot}}{\Theta_{zz}^{\prime tot}} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + 2m\left(\frac{L^2}{3} + R^2 + RL\right)}{\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2}$$

das schreibt sich dann als

$$\boxed{\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 + 4\frac{m}{M}\left[1 + \left(\frac{L}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right]}{1 + 4\frac{m}{M}}}$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich $\omega'/\omega \simeq 2.55$.

2 a) z -Komponente: das Drehmoment ist $\sim (\mathbf{e}_z \times \mathbf{L})$, d.h., $\mathbf{M}$ ist senkrecht zu $\mathbf{e}_z$, hat also keine z -Komponente, $M_z = 0$. Damit ist sofort $\frac{d}{dt}L_z = 0$.

Betrag:

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{L}|^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{L}\mathbf{L} = 2\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{L} = 2\mathbf{L}\mathbf{M} = 0$$

denn $\mathbf{M}$ ist auch senkrecht zu $\mathbf{L}$.

b) Die Bewegungsgleichung in Komponenten:

$$\begin{aligned} \dot{L}_x &= -\frac{M_0}{|\mathbf{L}|}L_y \\ \dot{L}_y &= \frac{M_0}{|\mathbf{L}|}L_x \\ \dot{L}_z &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{L}_x &= -\frac{M_0}{|\mathbf{L}|}\dot{L}_y \\ \ddot{L}_y &= \frac{M_0}{|\mathbf{L}|}\dot{L}_x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \ddot{L}_x + \Omega^2 L_x = 0 \quad \Rightarrow \quad L_x(t) = A \cos(\Omega t - \varphi)$$

mit $\Omega = M_0/|\mathbf{L}|$ und den Integrationskonstanten A, φ . Mit

$$L_y = -\frac{1}{\Omega}\dot{L}_x \quad \text{folgt} \quad L_y(t) = A \sin(\Omega t - \varphi)$$

Da $L_z = \text{const.}$ und $|\mathbf{L}|^2 = \text{const.}$ muß auch $L_x^2 + L_y^2 = \text{const.}$ sein, was offenbar der Fall ist. Setzen wir $|\mathbf{L}| = L_0$ und die z -Komponente $L_z = L_0 \cos(\theta_0)$ mit dem Winkel der Projektion von $\mathbf{L}$ auf die z -Achse, dann legt dies die Konstante A fest,

$$|\mathbf{L}|^2 = L_0^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \cos^2(\theta_0) = A^2 + L_0^2 \cos^2(\theta_0) \quad \Rightarrow \quad A = L_0 \sin(\theta_0)$$

A ist eben die Länge der Projektion von $\mathbf{L}$ in die x - y -Ebene. Also:

$$\begin{aligned} L_x(t) &= L_0 \sin(\theta_0) \cos(\Omega t - \varphi) \\ L_y(t) &= L_0 \sin(\theta_0) \sin(\Omega t - \varphi) \\ L_z(t) &= L_0 \cos(\theta_0) \end{aligned}$$

Der Vektor $\mathbf{L}$ führt eine Präzession um die z -Achse aus, mit der Frequenz $\Omega = M_0/L_0$.

c) Die Integration über $\mathbf{r}$ in $\mathbf{M}$ führt man am besten im Hauptachsensystem aus, um die Hauptträgheitsmomente Θ_1, Θ_3 identifizieren zu können. Es gilt $\mathbf{r} = D\mathbf{r}'$ mit einer Drehmatrix D , also $\det(D) = 1$, und es folgt

$$\mathbf{M} = \alpha \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \mathbf{R}) (\mathbf{r}' \times \mathbf{R})$$

Zerlegen wir $\mathbf{r}'$ nach den Hauptachsen $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{r}' = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$, so folgt

$$\mathbf{M} = \alpha \int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(\mathbf{r}') [x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3] [(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \times (R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 + R_3 \mathbf{e}_3)]$$

mit den Komponenten $R_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i$ von $\mathbf{R}$ im Hauptachsensystem.

Die Vereinfachung ergibt sich, wenn man beachtet, daß der Trägheitstensor der Erde gegeben ist durch

$$\Theta_{ij} = \int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(\mathbf{r}') [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{i,j} - x_i x_j] = \Theta_i \delta_{i,j}$$

Dieser ist im Hauptachsensystem berechnet natürlich diagonal, d.h., alle Integrale der Form

$$\int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(\mathbf{r}') [x_i x_j] \Big|_{i \neq j} = 0$$

verschwinden. Damit bleibt nur noch übrig,

$$\mathbf{M} = \alpha \int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(\mathbf{r}') [(x_2^2 - x_3^2) R_2 R_3 \mathbf{e}_1 + (x_3^2 - x_1^2) R_1 R_3 \mathbf{e}_2 + (x_1^2 - x_2^2) R_1 R_2 \mathbf{e}_3]$$

Dies wird noch einfacher, wenn man das Drehmoment über ein Jahr mittelt: da sich herausstellen wird, daß die Präzessionsperiode wesentlich länger ist als 1 Jahr, ist das erlaubt. Dazu brauchen wir

$$\langle \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) = 0 \quad , \quad \langle \cos(\Omega t)^2 \rangle = \langle \sin(\Omega t)^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

und es bleibt nur, mit den R_i wie im Aufgabenblatt,

$$\langle R_1 R_3 \rangle = \frac{1}{2} |\mathbf{R}|^2 \cos(\theta_0) \sin(\theta_0)$$

übrig. So folgt schließlich

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{M} \rangle &= \alpha \int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(\mathbf{r}') (x_3^2 - x_1^2) \langle R_1 R_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
 &= -\alpha (\Theta_3 - \Theta_1) \langle R_1 R_3 \rangle \mathbf{e}_2 \\
 &= -\alpha (\Theta_3 - \Theta_1) \frac{1}{2} R^2 \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \mathbf{e}_2 \\
 &= \alpha (\Theta_3 - \Theta_1) \frac{1}{2} R^2 \cos(\theta_0) (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_z)
 \end{aligned}$$

d) $\mathbf{L} = L_0 \mathbf{e}_3$ bedeutet, daß wir die Präzession des freien symmetrischen Kreisels Erde ignorieren. Diese überlagert in Wirklichkeit die hier berechnete Präzession. Mit $L = \Theta_3 \omega_0$, $\omega_0 = 2\pi/\text{Tag}$, folgt aus b),

$$\omega = \frac{3}{2} G \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_3} \cos(\theta_0) \frac{m_S}{R^3} \frac{1}{\omega_0}$$

und nochmal ein gleichlautender Beitrag für den Mond. Einsetzen der Zahlenwerte liefert $\omega = 7.9 \cdot 10^{-12} \text{sec}^{-1}$, also $T = 2\pi/\omega = 25000$ Jahre.