1 a) Die Lagrangefunktion war:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - D(q_1^2 + q_2^2 - q_1q_2)$$

Konjugierte Impulse:

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m_1\dot{q}_1 \quad , \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_2\dot{q}_2$$

Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - \mathcal{L} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + D(q_1^2 + q_2^2 - q_1q_2)$$

Sind die Impulse erhalten? Kanonische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = -D(2q_1 - q_2) \neq 0 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = -D(2q_2 - q_1) \neq 0 \end{aligned}$$

Also sind p_1, p_2 keine Erhaltungsgrößen.

b) Die Lagrangefunktion war:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2] + mgl \cos(\theta)$$

Konjugierte Impulse:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad , \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}$$

Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2(\theta)} - mgl \cos(\theta)$$

Sind die Impulse erhalten? Kanonische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = mgl \sin(\theta) - \frac{p_\varphi^2 \cos(\theta)}{ml^2 \sin^2(\theta)} \neq 0 \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

Also ist p_φ eine Erhaltungsgröße, denn φ ist eine zyklische Koordinate. $p_\varphi \equiv L_z$ ist gerade der Drehimpuls, siehe auch Blatt 2, Aufg. 1 a).

$$\boxed{2} \text{ Poissonklammer: } \{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Damit: $\{f, g\} = -\{g, f\}$ sofort klar. Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial gh}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial gh}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} h - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} h \right) + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} g - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} g \right) \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\} \end{aligned}$$

Genauso folgt

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$$

3 a)

$$\{L_i, x_k\} = \sum_{l=x,y,z} \left(\frac{\partial L_i}{\partial p_l} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \frac{\partial L_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial p_l} \right)$$

Die x_i und p_i sind die unabhängigen Variablen,

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_l} = 0, \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{k,l} \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

Damit folgt $\{L_i, x_k\} = \frac{\partial L_i}{\partial p_k}$, im einzelnen:

$$\begin{aligned} \{L_x, y\} &= \frac{\partial L_x}{\partial p_y} = -z & \{L_y, x\} &= \frac{\partial L_y}{\partial p_x} = z \\ \{L_y, z\} &= \frac{\partial L_y}{\partial p_z} = -x & \text{und} & \{L_z, y\} = \frac{\partial L_z}{\partial p_y} = x \\ \{L_z, x\} &= \frac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y & \{L_x, z\} &= \frac{\partial L_x}{\partial p_z} = y \end{aligned}$$

Außerdem gilt natürlich $\{L_x, x\} = \{L_y, y\} = \{L_z, z\} = 0$, und zusammengefaßt lautet das Ergebnis

$$\begin{aligned} \{L_i, x_k\} &= -x_l & \text{mit} & \quad (i, k, l) = (1, 2, 3) \quad \text{und zyklisch} \\ \{L_i, x_i\} &= 0 \\ \{L_k, x_i\} &= -\{L_i, x_k\} \end{aligned}$$

((Dies läßt sich wieder mit dem ε -Tensor zusammenfassen, $\{L_i, x_k\} = -\sum_l \varepsilon_{ikl} x_l$.)

Ganz analog wird der "Kommutator" mit p berechnet:

$$\{L_i, p_k\} = \sum_{l=x,y,z} \left(\frac{\partial L_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_k}{\partial x_l} - \frac{\partial L_i}{\partial x_l} \frac{\partial p_k}{\partial p_l} \right) = -\frac{\partial L_i}{\partial x_k}$$

mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \{L_i, p_k\} &= -p_l \quad \text{mit} \quad (i, k, l) = (1, 2, 3) \quad \text{und zyklisch} \\ \{L_i, p_i\} &= 0 \\ \{L_k, p_i\} &= -\{L_i, p_k\} \end{aligned}$$

((In Kurzform: $\{L_i, p_k\} = -\sum_l \varepsilon_{ikl} p_l$.))

Nun zur Berechnung von $\{L_i, L_k\}$. Trivialerweise gilt $\{L_i, L_i\} = 0$. Von den nichttrivialen Kombinationen betrachte mal

$$\{L_x, L_y\} = \sum_l \left(\underbrace{\frac{\partial L_x}{\partial p_l} \frac{\partial L_y}{\partial x_l}}_{l \neq 3 \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{\partial L_x}{\partial x_l} \frac{\partial L_y}{\partial p_l}}_{l \neq 3 \rightarrow 0} \right) = y p_x - p_y x = -L_z$$

Für die Kombinationen $(y, z), (z, x)$ geht das genauso, und mit Hilfe von $\{A, B\} = -\{B, A\}$ ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} \{L_i, L_k\} &= -L_l \quad \text{mit} \quad (i, k, l) = (1, 2, 3) \quad \text{und zyklisch} \\ \{L_i, L_i\} &= 0 \\ \{L_k, L_i\} &= -\{L_i, L_k\} \end{aligned}$$

((In Kurzform: $\{L_i, L_k\} = -\sum_l \varepsilon_{ikl} L_l$.))

b) Teilchen im Zentralpotential:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \quad , \quad U(\mathbf{r}) = U(|\mathbf{r}|)$$

Lassen wir zunächst $U(\mathbf{r})$ allgemein, dann gibt die erste Klammer der Aufgabe die Zeitentwicklung des Drehimpulses wieder,

$$\frac{d}{dt} L_i = \{\mathcal{H}, L_i\} = \frac{1}{2m} \{(\mathbf{p})^2, L_i\} + \{U(\mathbf{r}), L_i\}$$

Die erste Klammer (kinetische Energie) wird mit den Regeln von oben ausgewertet, z.B. für $i = 1$:

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{p})^2, L_1\} &= \sum_k \{(p_k)^2, L_1\} = -2 \sum_k p_k \{L_1, p_k\} \\ &= -2[p_1 \underbrace{\{L_1, p_1\}}_{=0} + p_2 \underbrace{\{L_1, p_2\}}_{=-p_3} + p_3 \underbrace{\{L_1, p_3\}}_{=+p_2}] = -2[p_3 p_2 - p_2 p_3] = 0 \end{aligned}$$

und genauso für L_2, L_3 . Die kinetische Energie erhält also den (kanonischen) Drehimpuls, $\{T, L_i\} = 0$, und die zeitliche Veränderung wird allein durch das Potential bestimmt. Die entsprechende Poisson-Klammer lautet

$$\{U(\mathbf{r}), L_1\} = -\{L_1, U\} = -\sum_k \left(\frac{\partial L_1}{\partial p_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial L_1}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial p_k}}_{=0} \right)$$

Mit der Kraftkomponente F_k ,

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x_k} = (\text{grad } V)_k = -F_k$$

ergibt sich

$$\{U(\mathbf{r}), L_1\} = \sum_k \frac{\partial L_1}{\partial p_k} F_k = y F_3 - z F_2$$

und analog $\{U, L_2\} = z F_1 - x F_3$, $\{U, L_3\} = x F_2 - y F_1$.

Also

$$\boxed{\{U(\mathbf{r}), L_i\} = x_k F_l - x_l F_k \quad \text{mit} \quad (i, k, l) = (1, 2, 3) \quad \text{und zyklisch} \quad \Leftrightarrow \{U(\mathbf{r}), \mathbf{L}\} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

In einem Zentralpotential ist das Drehmoment $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U(|\mathbf{r}|) = -\frac{dU(r)}{dr} \text{grad } r = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Hier ist also $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ (Zentralkraft), und damit verschwindet die Poisson-Klammer,

$$\boxed{\{\mathcal{H}, \mathbf{L}\} = \{U(|\mathbf{r}|), \mathbf{L}\} = -\frac{dU(r)}{dr} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0}$$

Die restlichen Poisson-Klammern der Aufgabe sind jetzt einfach:

$$\{\mathcal{H}, |\mathbf{L}|^2\} = \sum_k \{\mathcal{H}, (L_k)^2\} = 2 \sum_k L_k \underbrace{\{\mathcal{H}, L_k\}}_{=0} = 0$$

Und:

$$\{|\mathbf{L}|^2, L_1\} = 2L_1 \underbrace{\{L_1, L_1\}}_{=0} + 2L_2 \underbrace{\{L_2, L_1\}}_{=L_3} + 2L_3 \underbrace{\{L_3, L_1\}}_{=-L_2} = 0 \quad \text{etc.}$$

Die physikalische Bedeutung ist schlicht die Erhaltung der Drehimpulskomponenten und des -betrages. Die Poissonklammer $\{|\mathbf{L}|^2, L_i\} = 0$ hat in der klassischen Mechanik keine direkte Bedeutung, kann aber rechentechnisch hilfreich sein.

c) Die Hamiltonfunktion ist also $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + U(r)$, und die angebliche Erhaltungsgröße ist der Lenz-Vektor $\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) + mU(r)\mathbf{r}$.

Zeitliche Veränderung: $\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \{\mathcal{H}, \mathbf{A}\} = \{\mathcal{H}, (\mathbf{p} \times \mathbf{L})\} + m\{\mathcal{H}, U(r)\mathbf{r}\}.$

Im Einzelnen:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}, (\mathbf{p} \times \mathbf{L})_i\} &= \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} \{\mathcal{H}, p_k L_l\} = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} [\{\mathcal{H}, p_k\} L_l + p_k \underbrace{\{\mathcal{H}, L_l\}}_{=0}] \\ \{\mathcal{H}, p_k\} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} = -\frac{\partial U(r)}{\partial x_k} = F_k \quad (\text{Kraftkomponente}) \\ \Rightarrow \{\mathcal{H}, (\mathbf{p} \times \mathbf{L})_i\} &= \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} F_k L_l = (\mathbf{F} \times \mathbf{L})_i\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}, (U(r)\mathbf{r})_i\} &= \{\mathcal{H}, U(r)\} x_i + U(r) \{\mathcal{H}, x_i\} \\ \{\mathcal{H}, x_i\} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{1}{m} p_i \\ \{\mathcal{H}, U(r)\} &= \frac{1}{2m} \{\mathbf{p}^2, U(r)\} = -\frac{1}{m} \sum_k p_k \{U(r), p_k\} = -\frac{1}{m} \sum_k p_k F_k = -\frac{1}{m} (\mathbf{pF}) \\ &\quad \text{mit } \{U(r), p_k\} = -\frac{\partial U(r)}{\partial x_k} = F_k \\ \Rightarrow \{\mathcal{H}, (U(r)\mathbf{r})_i\} &= -\frac{1}{m} (\mathbf{pF}) x_i + \frac{1}{m} U(r) p_i\end{aligned}$$

Zusammen:

$$\{\mathcal{H}, \mathbf{A}\} = (\mathbf{F} \times \mathbf{L}) - (\mathbf{pF})\mathbf{r} + U(r)\mathbf{p}$$

Einsetzen von

$$\mathbf{F} \times \mathbf{L} = \mathbf{F} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (\mathbf{Fp})\mathbf{r} - \mathbf{p}(\mathbf{Fr})$$

und der Kraft für ein Zentralpotential, s.o.,

$$\mathbf{F} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

liefert

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}, \mathbf{A}\} &= \mathbf{p}[U(r) - (\mathbf{Fr})] \\ &= \mathbf{p}\left[U(r) + \frac{dU(r)}{dr} r\right] \\ &= \mathbf{p}\left[\frac{\gamma}{r} - \frac{\gamma}{r^2} r\right] = 0\end{aligned}$$

Im letzten Schritt kommt auf die genaue Form des Zentralpotentials an: der Lenzvektor ist nur für das Keplerpotential γ/r eine Erhaltungsgröße.