

Übungsblatt Nr. 0 zur Theorie B (Präsenzübung)

1 Selbstschwingender Oszillator

Durch die Gleichung

$$\ddot{x} - 2\alpha(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

wird ein selbstschwingender Oszillator beschrieben. Die Gleichung kann nicht exakt gelöst werden; wir suchen hier eine *approximative* Lösung für den Fall $\alpha \ll 1$.

- (a) Betrachten Sie den Ansatz $x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t))$, wobei $A(t)$ und $\phi(t)$ nur langsam variieren, d.h. $\dot{A} \simeq 0$, $\ddot{\phi} \simeq 0$. Warum ist dies vernünftig? *Hinweis:* $\alpha \rightarrow 0$. Setzen Sie ihn in (1) ein, benutzen Sie $\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$ und $\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$ und ordnen Sie nach Termen mit gleichen trigonometrischen Funktionen. *Achtung:* Die resultierende DGL ist etwas lang — lassen Sie sich nicht abschrecken!
- (b) In dem Ergebnis aus (a) vernachlässigen Sie die dritten Harmonischen, also die Terme proportional zu $\sin 3(\omega_0 t + \phi)$ bzw. $\cos 3(\omega_0 t + \phi)$. Überzeugen Sie sich, dass der Ansatz für $x(t)$ nun (1) (näherungsweise) erfüllt, falls $A(t)$ die folgende DGL löst:

$$\dot{A} = \frac{1}{4} \alpha A(4 - A^2) \quad (2)$$

Hinweis: Im Term proportional zu $\sin(\omega_0 t + \phi)$ lässt sich $(\omega_0 + \dot{\phi})$ ausklammern.

Eine Lösung zu (2) ist $A = 2$. Welche Bedingung muss $\dot{\phi}$ dann erfüllen? Was sind die zwei möglichen Lösungen für ϕ und wie sind die resultierenden Ergebnisse für $x(t)$ miteinander verwandt?

- (c) Lösen Sie die DGL (2) durch Trennung der Variablen, wobei Sie das Integral durch Partialbruchzerlegung auswerten können. Nehmen Sie bei den auftauchenden Logs an, dass $0 < A(t) < 2$. *Ergebniss:* $A(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + C e^{-2\alpha t}}}$ mit $C = \text{Konst.}$
- (d) Wie lautet die Lösung zu $A(t)$ mit der Anfangsbedingung $A(0) = A_0 \ll 1$? Was ist $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$? Skizzieren Sie $A(t)$ und damit $x(t)$, wobei Sie die Zeitabhängigkeit von $\phi(t)$ vernachlässigen sollten. Wieso beschreibt (1) einen selbstschwingenden Oszillator?
- (e) Diskutieren Sie die Annahmen und Näherungen, die Sie gemacht haben. Sind sie gerechtfertigt?