

Theorie B, Blatt 1 - Lösungsskizze

- 1) Zustand eines Teilchens durch Ort $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$ gegeben (ausreichend, um das Verhalten des Teilchens für alle Zeiten mit Hilfe der Bewegungsgleichung vorherzusagen)

Erhaltungsgrößen: Größen, die zeitlich konstant sind

Zahl der Erhaltungsgrößen = $2s-1$, s = Zahl der Freiheitsgrade

In 3D $s=3 \Rightarrow 5$ Erhaltungsgrößen:

Energie E , 3-komponentiger Drehimpuls $\vec{L}$, Lenz-Länge-Vektor (wovon nur ein Komponent unabhängig von $E, \vec{L}$ ist)

- 2) Feder um x aus der Ruhelage ziehen $\Rightarrow$ es wirkt eine Kraft Die Richtung Ruhelage.

Linke Masse: $m\ddot{x}_1 = F_1 = \underbrace{-x_1 \cdot 0}_{\text{linke Feder}} + \underbrace{0(x_2 - x_1)}_{\text{rechte Feder}}$ (1)

Rechte Masse: $2m\ddot{x}_2 = F_2 = \underbrace{-0(x_2 - x_1)}_{\text{linke Feder}} - \underbrace{40x_2}_{\text{rechte Feder}}$ (2)

Ansetze $x_1 \rightarrow z_1 = a_1 e^{i\omega t}$, $x_2 \rightarrow z_2 = a_2 e^{i\omega t}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

Eingesetzt: $-m\omega^2 a_1 = -0a_1 + 0(a_2 - a_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} m\omega^2 \cdot 20 & 0 \\ 0 & 2m\omega^2 \cdot 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3)

- (b) Nur eine nichttriviale Lösung für a_1, a_2 falls

$\det \begin{pmatrix} m\omega^2 \cdot 20 & 0 \\ 0 & 2m\omega^2 \cdot 50 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (m\omega^2 \cdot 20)(2m\omega^2 \cdot 50) - 0^2 = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{30}{m}, \frac{30}{2m}$ (Eigenwerte)

Einsetzen in (3), um Eigenvektoren zu bestimmen:

$\omega^2 = \omega_+^2 = \frac{30}{m}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = -a_1$ (5)

Sei $a_1 = A e^{i\omega t}$. Physikalische Lösung:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} A e^{i\omega t} e^{i\omega t} \\ -A e^{i\omega t} e^{i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos(\omega_+ t + \varphi) \\ -A \cos(\omega_+ t + \varphi) \end{pmatrix}$ (6)

Massen bewegen sich in Gegenphase (d.h. in entgegengesetzte Richtungen) mit gleicher Amplitude:



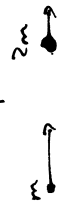
$\omega^2 = \omega_+^2 = \frac{30}{2m}$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}0 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} a_1$ (7)

Sei $a_1 = B e^{i\theta}$. Physikalische Lösung:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} B e^{i\theta} e^{i\omega t} \\ \frac{1}{2} B e^{i\theta} e^{i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cos(\omega_+ t + \theta) \\ \frac{1}{2} B \cos(\omega_+ t + \theta) \end{pmatrix}$ (8)

Massen bewegen sich in gleiche Richtung, aber linke Masse oszilliert mit doppelt so großer Amplitude:



Allgemeine Lösung: Summe von (6) und (8)

$x_1 = A \cos(\omega_+ t + \varphi) + B \cos(\omega_+ t + \theta)$

$x_2 = -A \cos(\omega_+ t + \varphi) + \frac{1}{2} B \cos(\omega_+ t + \theta)$

$\omega_+^2 = \frac{30}{m}, \omega_+^2 = \frac{30}{2m}$ (9)

A, B, φ, θ durch Anfangsbedingungen bestimmt (2 Teilchen in 1D $\Rightarrow 4$ Freiheitsgrade)

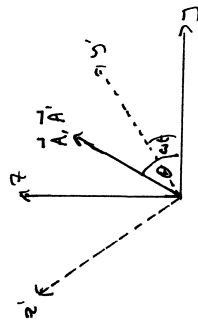
(3)

3) (a) K' rotiert um die x -Achse von $K \Rightarrow x$ -Achsen gleich

$$\Rightarrow A'_x = A_x$$

Im Folgenden nur y, z -Achsen betrachten.

Selber Punkt durch $\vec{A}$ in K und $\vec{A}'$ in K' gegeben. y, z -Achsen sind rotiert um ωt bezüglich y, z -Achsen $\Rightarrow \vec{A}'$ ist durch $\vec{A}$ gegeben aber rotiert um $-\omega t$.



Aus LA-Vorlesung:

$$\begin{pmatrix} A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\omega t) & -\sin(-\omega t) \\ \sin(-\omega t) & \cos(-\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y \cos \omega t + A_z \sin \omega t \\ -A_y \sin \omega t + A_z \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (1)$$

(angenommen $\vec{e}_y = \vec{e}_{y'}$ bei $t=0$ der Einfachheit halber)

(b) x -Komponente ist uninteressant. Setze $\vec{A} \rightarrow \vec{r}(t) = (y(t), z(t))$ in (1) ein und differenzieren:

$$v'_y = \frac{d}{dt} y' = \frac{d}{dt} y \cos \omega t - y \omega \sin \omega t + \frac{d}{dt} z \sin \omega t + z \omega \cos \omega t \quad (2)$$

$$= (\dot{y} + \omega z) \cos \omega t + (\dot{z} - \omega y) \sin \omega t$$

$$v'_z = \frac{d}{dt} z' = (-\dot{y} - \omega z) \sin \omega t + (\dot{z} - \omega y) \cos \omega t \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} y' = (\ddot{y} - \omega^2 y) \cos \omega t + (\ddot{z} - \omega^2 z) \sin \omega t + 2\omega(\dot{z} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t) \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z' = -(\ddot{y} - \omega^2 y) \sin \omega t + (\ddot{z} - \omega^2 z) \cos \omega t - 2\omega(\dot{z} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t) \quad (5)$$

Nun $\dot{y}, \dot{z}$ durch v'_y, v'_z ausdrücken:

$$(2) \Rightarrow \dot{z} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t = v'_y + \omega y \sin \omega t - \omega z \cos \omega t, \text{ in (5) einsetzen}$$

$$(3) \Rightarrow \dot{z} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t = v'_z + \omega y \cos \omega t + \omega z \sin \omega t, \text{ in (4) einsetzen}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} y' = (\ddot{y} + \omega^2 y) \cos \omega t + (\ddot{z} + \omega^2 z) \sin \omega t + 2\omega v'_z$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z' = -(\ddot{y} + \omega^2 y) \sin \omega t + (\ddot{z} + \omega^2 z) \cos \omega t - 2\omega v'_y \quad (7)$$

(4)

Mit m erweitern und als Vektor schreiben:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right] + 2\omega \begin{pmatrix} v'_z \\ -v'_y \end{pmatrix} m \quad (8)$$

Nun lautet die Bewegungsgleichung in K $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, also in K' mit Hilfe von (1)

$$m \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_y \\ F_z \end{pmatrix}}_{\vec{F}'} \quad (9)$$

~~In (8) eingetragte:~~

$$\text{auch } \vec{r} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad (10)$$

In (8) eingesetzt:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}' = m \ddot{\vec{r}}' + m \omega^2 \vec{r}' + 2m \omega \begin{pmatrix} v'_z \\ -v'_y \end{pmatrix} = \vec{F}' + m \omega^2 \vec{r}' - 2m \omega \begin{pmatrix} -v'_z \\ v'_y \end{pmatrix} = \vec{F}'_{\text{eff}} \quad (11)$$

$\uparrow$ äußere Kraft $\uparrow$ Zentrifugalkraft $\uparrow$ Corioliskraft

$$\text{Definiere Drehvektor } \vec{\omega} = \omega \vec{e}_x : m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}' = \vec{F}' - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}' - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (12)$$

(c) Freier Fall in K :

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -mg \vec{e}_z \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \quad \text{für die gegebenen Anfangsbedingungen}$$

In K' :

$x' = x = 0$; y' und z' durch (1) gegeben

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}gt^2 \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ -\cos \omega t \end{pmatrix}$$

