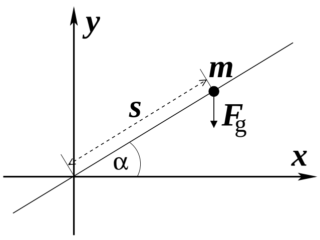
Universität Karlsruhe | Sommersemester 2004
Institut für Theorie der Kondensierten Materie | 3.5.04
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell | http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 | howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 2 zur Theorie B

1 Perle auf einer Stange

Eine Perle der Masse m gleitet im Schwerefeld $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ der Erde auf einer Stange, die um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt ist.



(a) Führen Sie die Lage s der Perle auf der Stange als generalisierte Koordinate ein und stellen Sie die (vorläufige) Lagrange-Gleichung 2. Art für $s(t)$ auf. Geben Sie die allgemeine Lösung für $s(t)$ an.

(a) Berücksichtigen Sie zusätzlich Reibung in der Form $\boldsymbol{F}_\mathrm{r} = -\gamma \boldsymbol{v} = -\gamma \binom{\dot{x}}{\dot{y}}$. Wie lautet nun die Lagrange-Gleichung für $s(t)$? Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe der Substitution $u = \dot{s}$ und Trennung der Variablen. Wie verhält sich die Perle für große Zeiten?
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass das Argument des auftretenden Logs positiv ist.

2 Perle auf einer rotierenden Stange I

Betrachten Sie das System aus Aufgabe 1 ohne Reibung, wobei die Stange jetzt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, $\alpha = \alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$. Die Perle ist so montiert, dass sie durch den Ursprung der Stange durchlaufen kann.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art für $s(t)$ auf und diskutieren Sie die Scheinkräfte in der Bewegungsgleichung (vergleichen Sie Blatt 1, Aufgabe 3(b)).

(b) Berechnen Sie die Lösung mit den Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$, $\dot{s}(0) = 0$. Wie verhält sich die Perle für große Zeiten für allgemeines s_0?

(c) Betrachten Sie nun speziell $s_0 = \tilde{s}_0 \equiv \frac{g}{2\omega^2}(\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0)$ und diskutieren und skizzieren Sie die Bahn der Perle für große Zeiten.
Hinweis: $\left(y - \frac{g}{4\omega^2}\right)^2 + x^2$ berechnen.
Was passiert, wenn s_0 sich von $\tilde{s}_0$ leicht unterscheidet? Ist die Bahn also stabil?

3 Perle auf einer rotierenden Stange II

Bearbeiten Sie das System aus Aufgabe 2 mit Hilfe der Lagrange-Funktion.

(a) Gehen Sie von $\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y, t)$ aus, wobei U die potentielle Energie ist, und benutzen Sie s als generalisierte Koordinate, um die Bewegungsgleichung herzuleiten.

(b) Betrachten Sie den Speziellfall $g = 0$ (z.B. die Stange rotiert auf einer waagerechten Ebene) und zeigen Sie, dass die Größe $H = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 s^2$ erhalten ist.

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Montag, den 10.5.04 —