

Blatt 2 - Lösungsskizze

1) (a) Generalisierte Koordinaten: $s(t)$ = Lage auf der Stange

mit $x(s) = s \cos \alpha$, $y(s) = s \sin \alpha$

Vorläufige Lagrange-Gleichung 2. Art (ohne Lagrange-Funktion):

$$\sum_j m \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k}$$

q_k = generalisierte Koordinaten, $\vec{F}$ = wahre Kraft
j läuft über die räumlichen Dimensionen

Hier $\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$, $q_k \rightarrow s$ und $j=1,2$ mit $x_1 = x$, $x_2 = y$

$$\Rightarrow m \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial s} + m \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial s} = \vec{F}_1 \frac{\partial x}{\partial s} + \vec{F}_2 \frac{\partial y}{\partial s}$$

Aus (1): $\ddot{x} = \ddot{s} \cos \alpha$, $\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha$, $\vec{F}_{gx} = 0$

$\ddot{y} = \ddot{s} \sin \alpha$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin \alpha$, $\vec{F}_{gy} = -mg$

Einsetzen liefert

$$m \ddot{s} = -mg \sin \alpha$$

Allgemeine Lösung: $s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$

(b) Reibung ergibt einen zusätzlichen Term auf der rechten Seite von (3):

$$\vec{F}_f = \begin{pmatrix} F_{fx} \\ F_{fy} \end{pmatrix} = -\delta \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta \dot{s} \cos \alpha \\ -\delta \dot{s} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Einsetzen in (3) liefert $m \ddot{s} = -\delta \dot{s} - mg \sin \alpha$

Substituiere $u = \dot{s} \Rightarrow m \dot{u} = -\delta u - mg \sin \alpha \Rightarrow m \int \frac{du}{\delta u + mg \sin \alpha} = - \int dt$

$$\Rightarrow \frac{m}{\delta} \ln(\delta u + mg \sin \alpha) = -t + A \Rightarrow u = \frac{ds}{dt} = -\frac{mg \sin \alpha}{\delta} + A' e^{-\delta t/m}, \quad A, A' = \text{Konstanten}$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{mg}{\delta} t \sin \alpha + A'' e^{-\delta t/m} + \beta, \quad A'', \beta = \text{Konstanten} \quad (8)$$

Große Zeiten: $e^{-\delta t/m} \rightarrow 0$ also $s(t) = \beta - \frac{mg \sin \alpha}{\delta} t$

$\Rightarrow$ Perle rutscht mit konstanter Geschwindigkeit die Stange herab.

Beim In angenommen, dass $\delta u + mg \sin \alpha > 0$. Überprüfen: (8) einsetzen
 $\delta \dot{s} + mg \sin \alpha = -\frac{\delta^2}{m} A'' e^{-\delta t/m} > 0$

$\Rightarrow$ Anfangsbedingungen müssen so sein, dass $A'' < 0$. Nun

$$\dot{s}(0) = -\frac{mg}{\delta} \sin \alpha - \frac{\delta A''}{m} = v_0 \Rightarrow A'' = -\frac{m}{\delta} \left(v_0 + \frac{mg}{\delta} \sin \alpha \right)$$

also $A'' < 0 \Rightarrow v_0 > -\frac{mg}{\delta} \sin \alpha$, z.B. $v_0 = 0$

2) (k) ~~setzen~~ Lagrange-Gleichung wie oben (3), aber jetzt

$$x(s) = s(t) \cos(\alpha_0 + \omega t) \Rightarrow \ddot{x} = (\ddot{s} - \omega^2 s) \cos(\alpha_0 + \omega t) - 2\dot{s}\omega \sin(\alpha_0 + \omega t)$$

$$y(s) = s(t) \sin(\alpha_0 + \omega t) \Rightarrow \ddot{y} = (\ddot{s} - \omega^2 s) \sin(\alpha_0 + \omega t) + 2\dot{s}\omega \cos(\alpha_0 + \omega t) \quad (10)$$

Anderer Terme wie vorher. In (3) einsetzen

$$\Rightarrow \ddot{s} - \omega^2 s = -g \sin(\alpha_0 + \omega t) \quad (11)$$

Schönkräfte:

$m\omega^2 s$ = Zentrifugalkraft nach außen.

Coriolis-Kraft steht immer senkrecht zur Geschwindigkeit (siehe Blatt 1, Aufgabe 3(b)), d.h. senkrecht zur Stange. Perle kann sich nur entlang der Stange bewegen $\Rightarrow$ Coriolis-Kraft kommt nicht in (11) vor.

(b) Homogene Gleichung: $\ddot{s} - \omega^2 s = 0 \Rightarrow s_{\text{hom}}(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} \quad (12)$

Partikuläre Lösung: erraten $s_{\text{part}}(t) = C \sin(\alpha_0 + \omega t)$. Einsetzen in

$$(11) \text{ liefert } C = \frac{g}{2\omega^2}.$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung $s(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\alpha_0 + \omega t) \quad (13)$

Anfangsbedingungen:

$$s(0) = s_0 = A + B + \frac{g}{2\omega^2} \sin \alpha_0$$

$$\dot{s}(0) = 0 = \omega A - \omega B + \frac{g}{2\omega} \cos \alpha_0$$

Für A, β lösen und in (12) einsetzen:

$$s(t) = \frac{1}{2\omega} \left[\cos s_0 - \frac{g}{2\omega} (\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0) \right] e^{\omega t} + \frac{1}{2\omega} \left[\cos s_0 - \frac{g}{2\omega} (\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0) \right] e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\alpha_0 + \omega t)$$

i. A. ist der Vorfaktor von $e^{\omega t}$ nicht null $\Rightarrow s(t)$ geht exponentiell gegen ∞ (oder $-\infty$), d.h. die Perle wird von der Zentrifugalkraft weg vom Ursprung getrieben.

$$(c) \ddot{s} \cdot \ddot{s}_0 = \frac{g}{2\omega^2} (\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0) \Rightarrow s(t) = \frac{g}{2\omega^2} \cos \alpha_0 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\alpha_0 + \omega t) \quad (15)$$

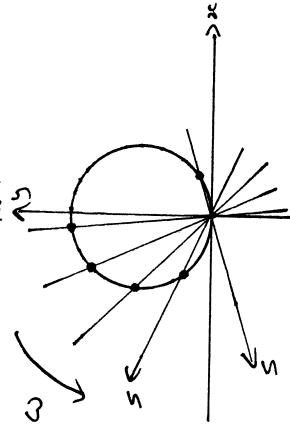
Für große Zeiten strebt $e^{-\omega t}$ gegen null $\Rightarrow s(t) \rightarrow \frac{g}{2\omega^2} \sin(\alpha_0 + \omega t) \quad (16)$

$x^2 + (y - \frac{g}{4\omega^2})^2$ mit $x = s \cos(\alpha_0 + \omega t)$ und $y = s \sin(\alpha_0 + \omega t)$ berechnen:

$$x^2 + (y - \frac{g}{4\omega^2})^2 = \left(\frac{g}{2\omega^2}\right)^2 \sin^2(\alpha_0 + \omega t) \cos^2(\alpha_0 + \omega t) + \left(\frac{g}{2\omega^2}\right)^2 \left[\sin^2(\alpha_0 + \omega t) - \frac{1}{2} \right]^2 = \left(\frac{g}{2\omega^2}\right)^2 \underbrace{\left[\sin^2(\alpha_0 + \omega t) \cos^2(\alpha_0 + \omega t) + \sin^4(\alpha_0 + \omega t) - \sin^2(\alpha_0 + \omega t) + \frac{1}{4} \right]}_{= \sin^2(\alpha_0 + \omega t)}$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - \frac{g}{4\omega^2})^2 = \left(\frac{g}{4\omega^2}\right)^2 \quad (17)$$

$\Rightarrow$ Kreis mit Zentrum $(0, \frac{g}{4\omega^2})$ und Radius $\frac{g}{4\omega^2}$.



Falls s_0 sich um einen beliebig kleinen Betrag von $\tilde{s}_0$ unterscheidet, ist der Vorfaktor zu $e^{\omega t}$ in (14) nicht null $\Rightarrow s(t)$ wächst exponentiell $\Rightarrow$ Bahn ist nicht stabil.

3) (a) Wie bei Aufgabe 2

$$x = s(t) \cos(\alpha_0 + \omega t) \Rightarrow \dot{x} = \dot{s} \cos(\alpha_0 + \omega t) - \omega s \sin(\alpha_0 + \omega t)$$

$$y = s(t) \sin(\alpha_0 + \omega t) \Rightarrow \dot{y} = \dot{s} \sin(\alpha_0 + \omega t) + \omega s \cos(\alpha_0 + \omega t)$$

Potenitielle Energie $U = mgy$

Einsetzen in Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) - mg s \sin \alpha$$

Lagrange-Gleichung 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \cdot 2 \dot{s} \right) = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot 2 s - mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow m \dot{s} = m \omega^2 s - mg \sin \alpha$$

was natürlich identisch zur Bewegungsgleichung (11) ist.

$$(b) \text{ Falls } g=0 \Rightarrow \ddot{s} - \omega^2 s = 0$$

$$\text{Nun } H = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 s^2 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \dot{s} \ddot{s} - \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot 2 s \dot{s} = m \dot{s} (\ddot{s} - \omega^2 s) = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{Konstante} \Rightarrow H \text{ ist Erhaltungsgröße.}$$

Alternativ:

Allg. Lösung (13) mit $g=0$ in H einsetzen:

$$s = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} \Rightarrow H = -2ABm\omega^2 = \text{Konstante}$$

NB: Zahl der Freiheitsgrade = 1 (Bewegung entlang der Stange)

$$\Rightarrow \text{Zahl der Erhaltungsgrößen} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$\Rightarrow H$ ist die einzige Erhaltungsgröße.