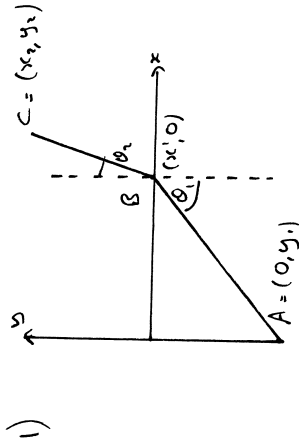


# Blatt 3 - Lösungsskizze



(Ursprung des Koordinatensystems so wählen, dass die Vektoren möglichst einfach sind.)

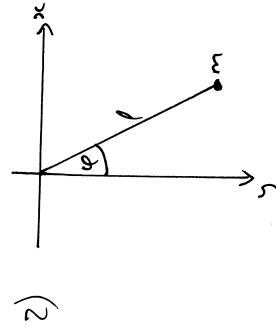
$$\text{Laufzeit } t = \frac{AB}{v_1} + \frac{BC}{v_2}$$

$$= \frac{1}{v_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} \quad (1)$$

t ist minimiert wenn

$$\frac{dt}{dx_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{v_1} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2}} = 0 \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2)$$

Dies ist natürlich das Brechungsgesetz von Snell.  
Das Fermatsche Prinzip: Licht nimmt den schnellsten Weg zwischen zwei Punkten (A und C).  
Für Licht definiert man den Brechungsindex  $n = \frac{c}{v}$  mit  $c = \text{Lichtgeschwindigkeit in Vakuum} \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$



Koordinatensprung in Aufhängungspunkt

$$x = l \sin \varphi \Rightarrow \dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$y = l \cos \varphi \Rightarrow \dot{y} = -l \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (3)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

wobei  $m = m(t) = m_0 e^{2\lambda t} \Rightarrow \dot{m} = \frac{dm}{dt} = 2\lambda m$  (4)

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \Rightarrow -mgl \sin \varphi = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\varphi}) = m l^2 \ddot{\varphi} + m l^2 \dot{\varphi}$$

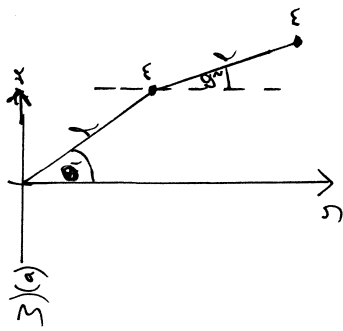
$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + 2\lambda \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \quad (5)$$

Für kleine Winkel gilt  $\sin \varphi \approx \varphi \Rightarrow (6)$  ist das bekannte gedämpfte harmonische Oszillator mit  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

Lösung aus Theorie A oder mit dem Ansatz  $\varphi = A e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \text{falls } \delta < \sqrt{g/l}, \quad \varphi(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi_0) \quad (7)$$

Falls man die Bewegungsgleichung mit dem Newtonschen Gesetz direkt schreiben wollte, müsste man aufpassen: es lautet nicht  $F = m \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  sondern  $F = \frac{dp}{dt}$  mit  $p = mv$ , und hier sind m sowie v zeitabhängig.



$$x_1 = l \sin \theta_1$$

$$y_1 = l \cos \theta_1 \quad (8)$$

$$x_2 = l \sin \theta_2 + l \cos \theta_2$$

$$y_2 = l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \quad (9)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)]$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$U_1 = -mgy_1$$

$$U_2 = -mgy_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \frac{1}{2} m l^2 [2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + mgl [2\cos \theta_1 + \cos \theta_2] \quad (10)$$

(b) 2 verallgemeinerte Koordinaten ~~mit~~ <sup>die</sup> jeweils eine Bewegungsgleichung erzeugen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} \quad (11)$$

(10) einsetzen. Für  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{2} m l^2 [4\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{1}{2} m l^2 [4\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2\dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 2mg l \sin \theta_1$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} \sin \theta_1 = 0$$

und analog für  $\theta_2$  bekommt man

$$\ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} \sin \theta_2 = 0$$

Für kleine Winkel:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{und} \quad \theta^2 \ll \theta, \quad \dot{\theta}^2 \ll \theta \quad \text{usw.}$$

$$(12) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \theta_1 = 0$$

$$(13) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \theta_2 = 0$$

Die Gleichungen sehen jetzt relativ einfach aus. Es wäre sehr schwierig gewesen, die Bewegungsgleichungen (12), (13) durch Betrachtung der Kräfte herzuleiten (welche Kraft übt die untere Masse auf die obere Masse aus?) — der Lagrange-Formalismus ist eleganter.

(c) Standardmethode des komplexen Ansatzes:  $\theta_j \rightarrow \varphi_j = a_j e^{i\omega t}$ ,  $a \in \mathbb{C}$

Eingesetzt:

$$(14) \Rightarrow -\omega^2 a_1 - \frac{1}{2} \omega^2 a_2 + \frac{g}{l} a_1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{g}{l} - \omega^2 & -\frac{1}{2} \omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$(15) \Rightarrow -\omega^2 a_2 - \omega^2 a_1 + \frac{g}{l} a_2 = 0$$

Nichttriviale Lösung falls die Determinante der Matrix null ist:

$$(\frac{g}{l} - \omega^2)^2 - (-\omega^2)(-\frac{1}{2}\omega^2) = 0 \Rightarrow (\frac{g}{l} - \omega^2)^2 = \frac{1}{2}\omega^4 \Rightarrow \frac{g}{l} - \omega^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

$$(17)$$

$$(12)$$

$$(13)$$

$$(14)$$

$$(15)$$

$$(16)$$

$$(17)$$

• Eigenvektor zu  $\omega_+^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}$ :

$$\text{Einsetzen in (16) liefert} \quad \frac{g}{l} \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -(1 + \sqrt{2}) a_1 - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1 \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = -a_1 \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = -a_1 \frac{\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (18)$$

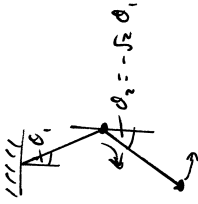
$$\Rightarrow \underline{a_2 = -\sqrt{2} a_1} \quad (19)$$

$$\text{Sei } a_1 = A e^{i\omega_+ t} \Rightarrow \varphi_1 = \text{Re} [A e^{i\omega_+ t} e^{i\omega_+ t}] = A \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad (20)$$

$$\text{und } \varphi_2 = \text{Re} [-\sqrt{2} A e^{i\omega_+ t} e^{i\omega_+ t}] = -\sqrt{2} A \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \quad (21)$$

Physikalisch: gegenphasige Schwingungen

Da  $|\theta_2| > |\theta_1|$  befinden sich die Massen immer an gegenüberliegenden Seiten des Aufhängepunktes



• Eigenvektor zu  $\omega_-^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}$ :

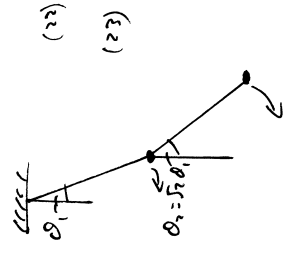
$$\text{Einsetzen in (16) liefert} \quad \frac{g}{l} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ -2 + \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (-1 + \sqrt{2}) a_1 + (-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1 \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = -a_1 \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = -a_1 \frac{-\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \underline{a_2 = \sqrt{2} a_1} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \text{Sei } a_1 = B e^{i\omega_- t} \Rightarrow \varphi_1 = B \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{2} B \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$



Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{\varphi_1 = A \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + B \cos(\omega_- t + \varphi_-)}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_2 = -\sqrt{2} A \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \sqrt{2} B \cos(\omega_- t + \varphi_-)}}$$

$$A, B, \varphi_+, \varphi_- = \text{Konstanten} \quad (24)$$