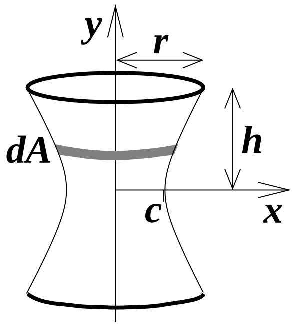
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

Sommersemester 2004
17.5.04
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/
howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 4 zur Theorie B

1 Seifenhaut

Die energetisch günstigste Form einer Seifenhaut hat eine kleinstmögliche Oberfläche A, wodurch die Oberflächenspannung minimiert wird. Wir betrachten eine Seifenhaut zwischen zwei Ringen mit Radius r, die sich im Abstand $2h$ befinden.



(a) Machen Sie sich geometrisch klar, dass das Flächenelement durch $\mathrm{d}A = 2\pi\, x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ gegeben ist. Geben Sie das Funktional $A[y, y', x]$ der Mantelfläche an und stellen Sie die Euler–Lagrange-Gleichung (in Analogie zum Wirkungsprinzip) auf. Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung $y(x)$.
Hinweis: Sie müssen nur eine DGL erster Ordnung lösen. Integrale der Form $\int \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ lassen sich mit der Substitution $x = a\cosh u$ berechnen.

(b) Benutzen Sie die Randbedingungen, um die Integrationskonstanten durch c (siehe Abbildung) auszudrücken und zu zeigen, dass c durch die transzendente Gleichung $\frac{r}{c} = \cosh\frac{h}{c}$ bestimmt wird.

(c) Berechnen Sie nun A in Abhängigkeit von h und c.

(d)* **Bonusaufgabe:**
Zieht man die Ringe auseinander, nimmt das Verhältnis $\frac{r}{h}$ ab. Zeigen Sie, dass $\frac{r}{h}$ eine untere Schranke hat ($\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}c}$ berechnen!), und drücken Sie diese durch die Lösung $x_0 \simeq 1{,}19$ zu $x_0\tanh x_0 = 1$ aus. Zeigen Sie, dass in diesem Grenzfall gilt $A = 2\pi r^2 x_0$. Welche Form hat die Seifenhaut, wenn der Abstand zwischen den Ringen noch größer wird?

2 Zweikörperproblem

Betrachten Sie zwei Körper mit Massen m_1 und m_2, deren Wechselwirkung nur von ihrem relativen Abstand abhängig ist, $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \boldsymbol{r}_2, \dot{\boldsymbol{r}}_2)$?
Betrachten Sie ein neues Koordinatensystem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R} = \alpha\boldsymbol{r}_1 + \beta\boldsymbol{r}_2$, $\alpha \neq -\beta$. Wie muss man β wählen, damit das System in zwei wechselwirkungsfreie Teile zerfällt, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\boldsymbol{R}, \dot{\boldsymbol{R}}) + \mathcal{L}_2(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$? Welchen Vorteil hat es für die Interpretation von $\mathcal{L}_1(\boldsymbol{R}, \dot{\boldsymbol{R}})$, wenn man α so wählt, dass R die Schwerpunktskoordinate ist?

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\boldsymbol{R}$ und geben Sie deren allgemeine Lösung an. Welche Größe ist erhalten? Führen Sie Polarkoordinaten $\boldsymbol{r} = (r, \phi)$ für die Relativkoordinate ein und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ. Welche Erhaltungsgröße erkennen Sie?

(c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für r und eliminieren Sie $\dot{\phi}$ mit Hilfe einer Erhaltungsgröße. Multiplizieren Sie die Gleichung mit $\dot{r}$, integrieren Sie bezüglich t und diskutieren Sie das Ergebniss (siehe Theorie A, Blatt 13, Aufgabe 1(b)).

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Montag, den 24.5.04 —