

Blatt 4 - Lösungsskizze

1(a) Flächenelement ist ein Band mit Radius x und Breite $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



$$\Rightarrow dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\text{Mantelfläche } A = \int dA = \int 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

wobei wir über die Integrallimits erst noch schreiben [siehe (c)].

Wir wollen $y(x)$ so bestimmen, dass A minimiert wird. Vergleiche mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung: ein System folgt der Bahn $q(t)$, die $S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$ minimiert, und $q(t)$ ist durch Euler-Lagrange bestimmt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Schreibe (2) in der Form von S:

$$A = \int f(y, y', x) dx \text{ mit } f = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2}$$

also ist A minimiert falls

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

Integrieren bezüglich x :

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = a = \text{Konstante} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Trennung der Veränderlichen: $\int dy = \int \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$

Substituiere $x = a \cosh u \Rightarrow dx = a \sinh u du$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 u - a^2} = a \sinh u$$

$$\Rightarrow y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a \int \frac{a \sinh u du}{a \sinh u} = au + b$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{b + a \cosh^{-1} \frac{x}{a}}}, \quad a, b = \text{Konstanten}$$

(1)

NB: Falls man (ungeschicklicherweise) die linke Seite von (5) ableitet, bekommt man $xy'' + y' + y'^3 = 0$

Diese enthält nur y'' und y' , nicht $y \Rightarrow$ substituere $z = y'$ (siehe Blatt 2, Aufgabe 1(b)) und mit Trennung der Veränderlichen lösen:

$$xz' + z^2 = 0 \Rightarrow \int dz \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{1+z^2} \right) = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{z}{1+z^2} = \frac{a}{x}$$

Da $z = y'$ ist dies nichts anderes als die linke Gleichung in (6).

Fazit: Denken statt blind Rechnen spart Arbeit!

(b) $\cosh^{-1} x$ ist keine eindeutige Funktion von x

$\Rightarrow$ entweder muss man beim Einsetzen der

Randbedingungen in (8) anpassen, oder

vernichtet man das Problem durch umschreiben:

$$(2) \Rightarrow x = a \cosh \frac{y-b}{a}$$

Randbedingungen: $x=r$ bei $y=\pm h$

$$\Rightarrow r = a \cosh \frac{h-b}{a}$$

$$\text{und } r = a \cosh \frac{-h-b}{a} = a \cosh \frac{h+b}{a}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b=0}}$$

Per Definition (in der Skizze) $x=c$ bei $y=0$. In (9) einsetzen:

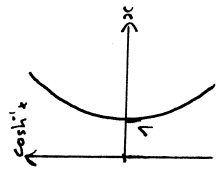
$$c = a \cosh 0 = a \Rightarrow \underline{\underline{a=c}}$$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung lautet } \underline{\underline{x = c \cosh \frac{y}{c} \Leftrightarrow y = c \cosh^{-1} \frac{x}{c}}}$$

$$\text{Randbedingungen in (11) einsetzen: } x=r \text{ bei } y=\pm h \Rightarrow \underline{\underline{\frac{r}{c} = \cosh \frac{h}{c}}}$$

Für gegebene r, h bestimmt (12) c .

(c) Mantelfläche durch (2) gegeben mit $y(x)$ durch (11) gegeben, wobei y' schon in (6) ausgerechnet worden ist.



(9)

(10)

(11)

(12)

(8)

}

(7)

(3)

Limites im Integral: für jeden Wert von x gibt es einen Beitrag vom Flächenelement oberhalb der x -Achse ($y > 0$) und den gleichen Beitrag vom Flächenelement unterhalb der x -Achse ($y < 0$). $c < x < r$

$$\Rightarrow A = 2 \int_c^r 2\pi x \sqrt{1+y'^2} dx = 4\pi \int_c^r x \sqrt{1+\frac{c^2}{x^2}} dx = 4\pi \int_c^r \frac{x^2}{\sqrt{x^2-c^2}} dx \quad (13)$$

$y > 0$ und $y < 0$

Substitution (7) benutzen: $x = c \cosh u$

Limites: $x = c \Rightarrow u = 0$, $x = r \Rightarrow u = \cosh^{-1} \frac{r}{c} = \frac{h}{c}$ durch (12)

$$\Rightarrow A = 4\pi \int_0^{h/c} \frac{c^2 \cosh^2 u}{c \sinh u} \cdot c \sinh u du = 4\pi c^2 \int_0^{h/c} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2u \right) du$$

$$= 4\pi c^2 \left[\frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sinh 2u \right]_0^{h/c} \Rightarrow A = 2\pi c^2 \left(\frac{h}{c} + \frac{1}{2} \sinh \frac{2h}{c} \right) \quad (14)$$

(d) Physikalisch will man die Entwicklung der Seifenhaut betrachten, wenn man zwei Ringe fester Radius r auseinander zieht. Es ist aber äquivalent und mathematisch leichter, h festzuhalten und r kleiner zu machen. Aus (12) $r = c \cosh \frac{h}{c}$

Für festen h variiert man $c \Rightarrow r$ variiert. (15)

Man kann sich leicht überzeugen, dass $c \rightarrow 0 \Rightarrow r \rightarrow \infty$ und $c \rightarrow \infty \Rightarrow r \rightarrow \infty$

also für einen endlichen Wert von c nimmt r ein Minimum.

$$\frac{dr}{dc} = 0 \Rightarrow \cosh \frac{h}{c} + c \cdot \left(-\frac{h}{c^2}\right) \sinh \frac{h}{c} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{h}{c} \tanh \frac{h}{c} = 1 \quad (16)$$

Vergleiche mit $> c_0 \tanh c_0 = 1 \Rightarrow \frac{h}{c} = x_0 \Rightarrow c = \frac{h}{x_0}, x_0 \approx 1,19$ (17)

In (15) $\Rightarrow r = \frac{h}{x_0} \cosh x_0$ (18)

Eingesetzt in (14): $A = 2\pi c^2 \left(x_0 + \frac{1}{2} \sinh 2x_0 \right) = 2\pi c^2 (x_0 + \sinh x_0 \cosh x_0)$

$$= 2\pi c^2 \cosh^2 x_0 \left(\frac{x_0}{\cosh x_0} + \tanh x_0 \right)$$

(4)

aber $\frac{1}{\cosh^2 x_0} = 1 - \tanh^2 x_0$ und per Definition $\tanh x_0 = \frac{1}{x_0}$

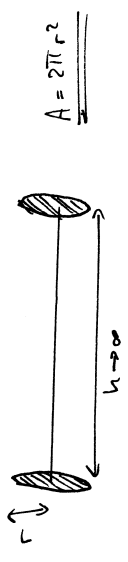
$$\Rightarrow A = 2\pi \left(\cosh x_0 \right)^2 \left[x_0 \left(1 - \frac{1}{x_0^2} \right) + \frac{1}{x_0} \right] \Rightarrow A = 2\pi r^2 x_0 > 2\pi r^2$$

$= r$ mit (17), (18)

(13) ergibt den minimalen Wert von $\frac{A}{h} \Rightarrow$ den minimalen Wert von $\frac{h}{r}$

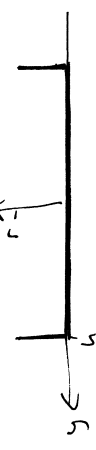
$$\Rightarrow h \leq r \frac{x_0}{\cosh x_0} = 0,66 r$$

Welche Form nimmt die Seifenhaut an, wenn ~~der~~ Abstand zwischen den Ringen größer als 0,66r ist? Betrachte zwei Ringe mit unendlichen Abstand: die minimale Fläche besteht offensichtlich aus zwei Kreisen mit einem unendlich dünnen Seifenblatt dazwischen



$$A = 2\pi r^2$$

Die Funktion $y(x)$ ist offensichtlich nicht differenzierbar und kann deswegen nicht durch Euler-Lagrange bestimmt werden.



NB: In der Physik nimmt man normalerweise an, dass jedes Funktion stetig und differenzierbar ist. Dies ist in Allgemeinen gerechtfertigt; sollte es nicht der Fall sein, wird die Rechnung in Schwirrigkeiten geraten, wie hier für $h > 0,66r$, und dann muss man es genauer überlegen.

2) (a) $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ $\lambda = \frac{1}{2} m_1 \vec{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{r}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ (20)

Seien $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{R} = \alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_1 = \frac{\vec{R} + \beta \vec{r}}{\alpha + \beta}, \quad \vec{r}_2 = \frac{\vec{R} - \alpha \vec{r}}{\alpha + \beta} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2(\alpha + \beta)^2} \left[\vec{R}^2 (m_1 + m_2) + \vec{r}^2 (\beta^2 m_1 + \alpha^2 m_2) + 2\vec{R} \cdot \vec{r} (\beta m_1 - \alpha m_2) \right] - U(r) \quad (22)$$

Gemischter Term ($\vec{r} \cdot \vec{R}$) verschwindet falls $\beta = \frac{m_2}{m_1} \alpha$

5

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r)}} \quad M = m_1 + m_2 = \text{Gesamtmasse} \quad (23)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{"reduzierte Masse"}$$

Falls $\vec{R}$ die Schwerpunktkoordinate sein sollte, $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad L_1 = \frac{1}{2} \mu \dot{R}^2, \quad (24)$$

Wenn L_1 als kinetische Energie des Schwerpunktes interpretiert werden ($L = T - U$ mit $U=0$)

Die Bewegungsgleichung für $\vec{R}$ ist durch L_1 allein bestimmt
 Die Bewegungsgleichung für $\vec{r}$ ist durch L_2 allein bestimmt

(b) Bewegungsgleichung für $\vec{R}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) = \frac{\partial L}{\partial R} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mu \dot{R}) = 0$
 $\Rightarrow$ Gesamtimpuls $\vec{P} = M \dot{R}$ ist erhalten. Allgemeine Lösung: $\vec{R} = \vec{S}_0 + \vec{V}_0 t \quad (24\frac{1}{2})$
 $\Rightarrow$ gleichmäßige Bewegung des Gesamtsystems.

Polarkoordinaten für $\vec{r}$: $\vec{r} = (r, \varphi) \Rightarrow \dot{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$
 $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (25)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Drehimpuls } L = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{konstante}}} \quad (26)$

(c) $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (27)$

(26) einsetzen und mit r multiplizieren:

$$\mu r \ddot{r} = r \mu r \left(\frac{L}{\mu r^2} \right)^2 - r \frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow \mu r \ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{dr}{dr} \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 \right) = \frac{L^2}{\mu} \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) - \frac{d}{dr} U(r)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 \mu r^2}}_{\text{KE}} + U(r) = \text{konstant} = E \quad (28)$$

effektives Potential

Das 2-Körper-Problem⁽²⁰⁾ reduziert sich auf eine gleichmäßige Bewegung des Schwerpunktes (24 $\frac{1}{2}$) und ein Teilchen mit Masse μ in einem Zentralfeld (25). Letzteres reduziert sich auf ein Teilchen in einem eindimensionalen effektiven Potential $U(r) + \frac{L^2}{2 \mu r^2}$, (28).