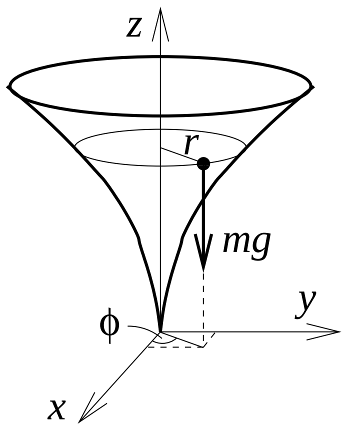
Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

Sommersemester 2004
24.5.04
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/
howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 5 zur Theorie B

Da der 31. Mai ein Feiertag ist, sollten Sie Ihre Lösungen bis 11:00 Uhr am Dienstag, dem 1. Juni in dem entsprechenden Kasten im Eingangsbereich des Physikhochhauses schriftlich abgeben! Bitte geben Sie deutlich an, welche Aufgaben Sie als ausreichend vorbereitet betrachten (d.h. welche Sie in den Übungen ankreuzen würden).

1 Trichter



Ein Teilchen der Masse m rutscht im Schwerefeld der Erde auf der Innenfläche eines Trichters mit Radius $r = \sqrt{az}$, $a =$ Konstante.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrangegleichungen für die generalisierten Koordinaten z und ϕ.

(b) Identifizieren Sie die Erhaltungsgröße L, die mit der Winkelbewegung $\phi(t)$ verbunden ist, und benutzen Sie dies um $\dot{\phi}$ aus der Bewegungsgleichung für z zu eliminieren. Zeigen Sie, dass $z = z_0 =$ Konstante eine Lösung ist und bestimmen Sie z_0 in Abhängigkeit von L.

(c) Die Masse wird ein wenig aus der Kreisbahn ausgelenkt, $z(t) = z_0 + u(t)$. Zeigen Sie, dass man für kleine Auslenkungen u einen harmonischen Oszillator bekommt und bestimmen Sie die Oszillationsfrequenz. Diskutieren Sie das Ergebnis.
Hinweis: $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ und alle quadratische Terme vernachlässigen.

(d)* Bonusaufgabe:
Untersuchen Sie die Wirkung von Rayleighscher Reibung $F = \frac{1}{2}\gamma\dot{\boldsymbol{r}}^2$ mit Hilfe der modifizierten Lagrangegleichung, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \to \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha}$, indem Sie zunächst $L(t)$ berechnen. In der Bewegungsgleichung für z nehmen Sie $\dot{z} \simeq 0$ und $\ddot{z} \simeq 0$ an (wann ist dies gerechtfertigt?) und bestimmen Sie die Lösung mit der Anfangsbedingung $z(0) = z_0$.

2 Teilchen im Rätselfeld

Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines Teilchens $\mathcal{L}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ und $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))$ ein Vektorfeld.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen (in kartesischen Koordinaten) für die drei Felder $\boldsymbol{A}_1 = A_0(-y, 0, 0)$, $\boldsymbol{A}_2 = A_0(0, x, 0)$ und $\boldsymbol{A}_3 = A_0(-\frac{1}{4}y, \frac{3}{4}x, 0)$ mit $A_0 =$ Konstante auf.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_3$ und beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens. *Hinweis:* $\dot{x} = v_x$ und $\dot{y} = v_y$ substituieren.
Was ist der Unterschied zwischen einer Spirale und einer Helix?

(c) Welches physikalische System (aus Theorie A) wird durch $\mathcal{L}(\boldsymbol{r})$ beschrieben? Identifizieren Sie alle Erhaltungsgrößen und erläutern Sie die Bedeutung von $\boldsymbol{A}$. Können Sie das Ergebnis aus **(a)** erklären?
Hinweis: Die Bewegungsgleichung lässt sich in der Form $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$ schreiben.