Blatt 5 – Lösungsskizze

1)(a) $r = \sqrt{az}$ x, y durch verallgemeinerte Koordinaten z, φ ausdrücken:

$x = r\cos\varphi = \sqrt{az}\cos\varphi \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{z}}\,\dot{z}\cos\varphi - \sqrt{az}\,\dot{\varphi}\sin\varphi$

$y = r\sin\varphi = \sqrt{az}\sin\varphi \Rightarrow \dot{y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{z}}\,\dot{z}\sin\varphi + \sqrt{az}\,\dot{\varphi}\cos\varphi$ (1)

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz = \underline{\underline{\frac{1}{2}m\left(\frac{a}{4z}\dot{z}^2 + az\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz}} \quad (2)$$

Bewegungsgleichung für φ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dt}(maz\dot{\varphi}) = 0}} \quad (3)$$

Bewegungsgleichung für z:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{ma}{4z}\dot{z} + m\dot{z}\right) = -\frac{ma}{8z^2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 a - mg$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{z}\left(1+\frac{a}{4z}\right) = \frac{a}{8}\frac{\dot{z}^2}{z^2} + \frac{1}{2}a\dot{\varphi}^2 - g}} \quad (4)$$

(b) Aus (3) folgt $\underline{maz\dot{\varphi} = L = \text{Konstante}}$ (5)

aber $z = \frac{r^2}{a} \Rightarrow L = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow$ Drehimpuls ist erhalten

(5) in (4) einsetzen:

$$\ddot{z}\left(1+\frac{a}{4z}\right) = \frac{a}{8}\frac{\dot{z}^2}{z^2} + \frac{L^2}{2m^2az^2} - g \quad (6)$$

$z = z_0 = \text{Konstante} \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0 \Rightarrow \frac{L^2}{2m^2az_0^2} - g = 0 \Rightarrow \underline{\underline{z_0^2 = \frac{L^2}{2m^2ag}}}$ (7)

also wenn z_0 durch (7) gegeben ist, ist dies eine Lösung von (6).

(c) $z = z_0 + u(t)$ in (6) einsetzen:

$$\ddot{u}\left[1+\frac{a}{4z_0(1+u/z_0)}\right] = \frac{a}{8}\frac{\dot{u}^2}{z_0^2(1+u/z_0)^2} + \frac{L^2}{2m^2az_0^2(1+u/z_0)^2} - g$$

Kleine Auslenkungen $\Rightarrow u \ll z_0 \Rightarrow (1+\frac{u}{z_0})^n \simeq 1 + n\frac{u}{z_0}$:

$$\ddot{u}\left[1+\frac{a}{4z_0}\left(1-\frac{u}{z_0}\right)\right] = \frac{a}{8}\frac{\dot{u}^2}{z_0^2}\left(1-\frac{2u}{z_0}\right) + \underbrace{\frac{L^2}{2m^2az_0^2}}_{=g}\left(1-\frac{2u}{z_0}\right) - g$$

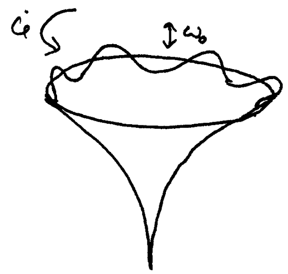
nichtlineare Terme jetzt vernachlässigen (konsistent mit der obigen Entwicklung)

$$\Rightarrow \ddot{u}\left(1+\frac{a}{4z_0}\right) = -\frac{2g}{z_0}u \Rightarrow \ddot{u} + \frac{2g}{z_0+a/4}u = 0$$

$\Rightarrow$ harmonischer Oszillator mit Frequenz $\underline{\underline{\omega_0^2 = \frac{2g}{z_0+a/4}}}$ (9)

Für kleine Auslenkung aus der Kreisbahn lautet die Lösung

$$\underline{\underline{z(t) = z_0 + u_0\cos(\omega_0 t + \alpha)}}$$



Die Bewegung ist eine ~~Fo~~ Folge des Wechselspiels zwischen Schwerekraft und Zentrifugalkraft. Da die Steigung des Trichters und damit die Komponenten von diesen Kräften parallel zur Innenfläche von der Höhe z_0 abhängen, ist es nicht überraschend, dass ω_0 auch z_0 abhängig ist.

Frequenz $\dot{\varphi}$ der Kreisbewegung durch (5) gegeben:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{maz} \simeq \frac{L}{maz_0} \overset{(7)}{=} \sqrt{\frac{2g}{a}} \quad \text{unabhängig von } z_0!$$

Das ist Zufall, ~~und~~ und gilt nur für $r = \sqrt{az}$ (z.B. $r = cz \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{g}{z}}$)

(d)* Rayleigsche Reibung $F = \frac{1}{2}\gamma\dot{\vec{r}}^2$ mit $\dot{\vec{r}}^2$ aus (1), (2)

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{a}{4z}\dot{z}^2 + az\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \quad (10)$$

Begungsgleichung für φ: $-\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}}$ zur rechten Seite von (3) addieren

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\underbrace{maz\dot{\varphi}}_{L}) = -\gamma az\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = -\frac{\gamma}{m}L \Rightarrow \frac{dL}{L} = -\frac{\gamma}{m}dt$$

$\Rightarrow \ln L - \ln L_0 = -\frac{\gamma t}{m} \Rightarrow \underline{\underline{L = L_0 e^{-\gamma t/m}}}$ Der Drehimpuls zerfällt. (11)

Bewegungsgleichung für z: $-\frac{\partial F}{\partial\dot{z}}$ zur rechten Seite von (4) addieren

$$\ddot{z}\left(1+\frac{a}{4z}\right) = \frac{a}{8}\frac{\dot{z}^2}{z^2} + \frac{1}{2}a\dot{\varphi}^2 - g - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{4}\gamma a\frac{\dot{z}}{z} + \gamma\dot{z}\right)$$

$\dot{z} \simeq \ddot{z} \simeq 0$ und (11) einsetzen:

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{L}{maz}\right)^2 - g \simeq 0 \Rightarrow z(t) = \frac{L}{ma}\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{L_0}{\sqrt{2m^2ag}}e^{-\gamma t/m} \overset{(7)}{=} \underline{\underline{z_0 e^{-\gamma t/m}}} \quad (12)$$

Das Teilchen driftet langsam runter.

$\dot{z} \simeq 0$, $\ddot{z} \simeq 0$ ist gerechtfertigt für kleines γ.

2)(a) Um alle Felder gleichzeitig zu behandeln, betrachte

$$\vec{A} = A_0(-\alpha y, \beta x, 0) \quad (13)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \vec{A}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + A_0(-\alpha y\dot{x} + \beta x\dot{y}) \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x} - \alpha y A_0) = A_0\beta\dot{y} \Rightarrow m\ddot{x} = A_0(\alpha+\beta)\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y} + A_0\beta x) = -A_0\alpha\dot{x} \Rightarrow m\ddot{y} = -A_0(\alpha+\beta)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A}_1: \ \alpha=1, \beta=0 \Rightarrow \alpha+\beta=1 \\ \vec{A}_2: \ \alpha=0, \beta=1 \Rightarrow \alpha+\beta=1 \\ \vec{A}_3: \ \alpha=\frac{1}{4}, \beta=\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha+\beta=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \underline{\underline{m\ddot{x} = A_0\dot{y}}} & (15) \\ \underline{\underline{m\ddot{y} = -A_0\dot{x}}} & (16) \\ \underline{\underline{\ddot{z} = 0}} & (17) \end{array}$$

Die gleichen Bewegungsgleichungen für alle drei Felder! (Siehe (c))

(b) ~~$\dot{x} = v_x$ und $\dot{y} = v$~~

Die z-Richtung ist trivial: $\underline{\underline{z = z_0 + v_{z0}t}}$ (18)

$\dot{x} = v_x$ und $\dot{y} = v_y$ in (15), (16) substituieren:

(15): $m\dot{v}_x = A_0 v_y \Rightarrow m\ddot{v}_x = A_0\dot{v}_y$

(16): $m\dot{v}_y = -A_0 v_x$ in die obere Gleichung einsetzen:

$$m\ddot{v}_x = -\frac{A_0^2}{m}v_x \Rightarrow \ddot{v}_x + \left(\frac{A_0}{m}\right)^2 v_x = 0 \quad (19)$$

Dies ist der übliche harmonische Oszillator, mit der Lösung

$$v_x = v_\perp\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \underline{\underline{x = x_0 + \frac{v_\perp}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)}}, \ \omega = \frac{A_0}{m} \quad (20)$$

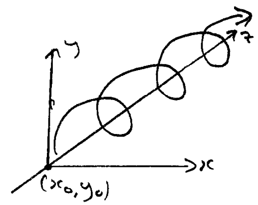
(20) in (15) einsetzen: $v_y = \frac{m}{A_0}\dot{v}_x = -\frac{1}{\omega}v_\perp\omega\sin(\omega t+\varphi)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = y_0 + \frac{v_\perp}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)}} \quad (21)$$

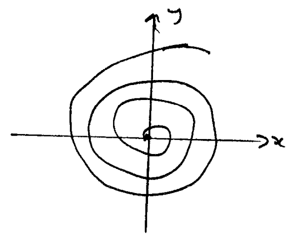
$x(t), y(t)$ liefern Kreisbewegung in der xy-Ebene um den Mittelpunkt (x_0, y_0) mit Radius $\frac{v_\perp}{\omega} = \frac{v_\perp m}{A}$. Mathematisch gesehen gilt

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \left(\frac{v_\perp}{\omega}\right)^2$$

Diese Kreisbahn ist auf eine gleichförmige Bewegung in die z-Richtung überlagert $\Rightarrow$ <u>Helixbahn</u>



Die Helix hat konstanten Radius und ist dreidimensional; die Spirale hat einen winkelabhängigen Radius und ist zweidimensional.



Nicht verwechseln! (was leider häufig vorkommt)

(c) Die Lagrange-Funktion (14) beschreibt ein Teilchen im Magnetfeld. Man erkennt die Bewegung; außerdem lautet die Lorentzkraft

$$\vec{F} = \vec{v}\wedge\vec{B} \quad (\text{für Ladung } q=1)$$

und vergleicht man die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{A})$ identifiziert man $\underline{\underline{\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A}}}$ (22)

$\vec{A}$ ist das Vektorpotential für das Magnetfeld $\vec{B}$; für (13) gilt

$$\vec{B} = \nabla\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\alpha y A_0 & \beta x A_0 & 0 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)A_0\vec{e}_z \Rightarrow \underline{\underline{\vec{B} = A_0\vec{e}_z}} \quad (23)$$

Die Potentiale $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ beschreiben alle das gleiche Magnetfeld (der Stärke A_0 in die z-Richtung)

Physikalisch misst man nicht Potentiale sondern die daraus abgeleiteten Felder, z.B. elektrisches Feld $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Man kann immer eine Konstante c zum Skalarpotential addieren, da $\nabla c = 0$. Genauso kann man immer eine Funktion $\vec{f}(\vec{r})$ mit der Eigenschaft $\vec{f}(\vec{r}) = \nabla\lambda(\vec{r})$ zu $\vec{A}$ addieren, da $\nabla\wedge(\vec{A}+\vec{f}) = \nabla\wedge\vec{A} + \underbrace{\nabla\wedge(\nabla\lambda)}_{=0\ \forall\lambda(\vec{r})}$.

Dieses heißt Eichfreiheit (siehe Theorie C)

Erhaltungsgrößen im Magnetfeld:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \text{Energie } E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_{z0}^2 + v_\perp^2) \\ \cdot\ z\text{-Impuls } mv_{z0} \\ \cdot\ \varphi \ (\text{Rotation der Helix um die } z\text{-Achse}) \\ \left.\begin{array}{l} \cdot\ x + \frac{v_y}{\omega} \\ \cdot\ y - \frac{v_x}{\omega} \end{array}\right\} \text{Drehachse der Helix} \end{array}\right\}$$

3 Dimensionen $\Rightarrow$ 6 Integrationskonstante $(z_0, v_{z0}, x_0, y_0, v_\perp, \varphi)$ und $2\times3-1 = 5$ Erhaltungsgrößen

$\boxed{\vec{L} \text{ ist erhalten aber nicht unabhängig! Siehe Anhang!}}$

Erhaltungsgrößen eines Teilchens in Magnetfeld

Die Bahn ist eine Helix mit Kreisfrequenz $\omega_c = \frac{eB}{m}$.

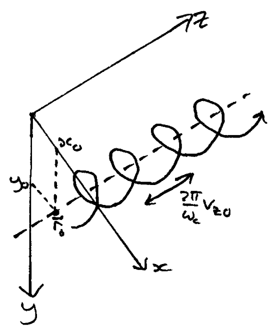
Betrachte Magnetfeld parallel zur z-Achse, $\vec{B} = (0, 0, B)$.

Die Achse der Helix ist parallel zu $\vec{B}$ und geht durch $(x_0, y_0, 0) \equiv \vec{r}_0$

Das Teilchen bewege sich mit Geschwindigkeit v_{z0} in die z-Richtung und der Radius der Helix sei r_c. Damit ist die Bahn gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \left(r_c \sin\omega_c(t-t_0),\ r_c \cos\omega_c(t-t_0),\ v_{z0}(t-t_0) + z_0\right)$$

mit 6 Integrationskonstanten: $x_0, y_0, z_0, r_c, v_{z0}, t_0$ (ω_c ist durch die Systemparameter e, m, B bestimmt).



Es gibt 5 Erhaltungsgrößen (und t_0):

i) Energie $E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (v_{z0}^2 + r_c^2 \omega_c^2)$

ii) Impuls in die z-Richtung $p_z = m v_{z0}$

iii), iv) Achse der Helix:

$$x_0 = x + \frac{v_y}{\omega_c}, \quad y_0 = y - \frac{v_x}{\omega_c}$$

Was ist die fünfte? Der Drehimpuls um die Helixachse ist erhalten, aber ist keine unabhängige Erhaltungsgröße:

$$L_{\text{Helixachse}} = (x - x_0) p_y - (y - y_0) p_x = -\frac{v_y}{\omega_c} p_y - \frac{v_x}{\omega_c} p_x = -\frac{m}{\omega_c} r_c^2 \omega_c^2 = \frac{p_z^2}{m \omega_c} - \frac{2E}{\omega_c}$$

Die fünfte ist z_0, die die Verschiebung der Helix parallel zur z-Achse angibt: ändert man z_0, bekommt man eine andere Bahn mit den selben E, p_z, x_0, y_0. Ausgedrückt durch dynamischen Variablen,

$$z_0 = z - \frac{v_{z0}}{\omega_c} \sin^{-1} \frac{x - x_0}{r_c} = \text{Konstante}$$

z_0 ist natürlich periodisch in der Ganghöhe („pitch") der Helix, $\frac{2\pi}{\omega_c} v_{z0}$