Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

Sommersemester 2004
28.5.04
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/
howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie B

1 Lagrange-Multiplikator

In dieser Aufgabe sollen Sie zwei Methoden benutzen, um das Minimum der Funktion $f(x,y) = x^2 + 16y^2$ mit der Nebenbedingung $g(x,y) \equiv xy - 1 = 0$ zu bestimmen.

(a) Drücken Sie y durch x mit Hilfe der Nebenbedingung aus und bestimmen Sie die Koordinaten (x_0, y_0), für die $f(x, y(x))$ ein Minimum annimmt. Skizzieren Sie $f(x,y)$, $g(x,y)$ und (x_0, y_0).

(b) Benutzen Sie einen Lagrange-Multiplikator λ, um die Nebenbedingung zu berücksichtigen, indem Sie $F(x,y,\lambda) \equiv f(x,y) + \lambda g(x,y)$ simultan für x und y minimieren und dann $g(x,y) = 0$ ausnutzen. Ist der Wert von λ bei dem Minimum bedeutsam?

2 Schwere Kette: Minimieren mit Nebenbedingung

Eine Kette (Masse m, Länge l) hängt zwischen den Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$. Gesucht ist die Form, die die Energie E minimiert. (Vergleichen Sie Blatt 4, Aufgabe 1 beim Rechnen!)

(a) Stellen Sie das Funktional $E + \lambda l \equiv \int \mathcal{F}(y, y', x)\,\mathrm{d}x$ auf, wobei E die potentielle Energie und λ ein Lagrange-Multiplikator für die Nebenbedingung Kettenlänge $= l = \mathit{const}$ sind. Da $\mathcal{F}(y, y', x)$ eigentlich von x unabhängig ist, gilt $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} y' - \mathcal{F} = \mathit{const}$. Benutzen Sie dies, um eine DGL erster Ordnung für $y(x)$ aufzustellen.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL und benutzen Sie die Randbedingungen, um λ und eine Integrationskonstante zu eliminieren. Erklären Sie, wie man die andere Integrationskonstante bestimmen würde, ohne die Rechnung durchzuführen.

3 Teilchen im Zentralfeld

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im attraktiven Zentralfeld $U(\boldsymbol{r}) = -\alpha/r^2$, $\alpha > 0$.

(a) Welche Symmetrien und zugehörige Erhaltungsgrößen gibt es? Zeigen Sie $\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2\boldsymbol{r}}{r^4}$ mit kartesischen Koordinaten und beweisen Sie, dass $A = m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r} - 2Et$ erhalten ist.

(b) Mit den üblichen Argumenten reduziert sich das Problem auf die Bewegung eines Teilchens in einem eindimensionalen effektiven Potential $U_{\text{eff}}(r)$ (Blatt 4, Aufgabe 2c). Skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(r)$ und diskutieren Sie das mögliche Verhalten des Teilchens. Benutzen Sie $U_{\text{eff}}(r)$ und E, um $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ als Funktion von r zu bestimmen und lösen Sie diese DGL durch Trennung der Variablen. *Hinweis:* Substitution $u = Er^2 + \alpha - \frac{L^2}{2m}$

(c)* Bonusaufgabe:
Betrachten Sie den Fall $r(0) = r_0$, $E = \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{L^2}{2m} - \alpha\right) < 0$ und berechnen Sie wie lange das Teilchen braucht, um den Ursprung zu erreichen. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten von $\phi(t)$ mit Hilfe von L und skizzieren Sie die Bahn des Teilchens.

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Montag, den 7.6.04 —