

Blatt 6 - Lösungsskizze

1) (a) Nebenbedingung direkt einsetzen:

$$g(x, y) = x^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(x, y) = x^2 + 16y^2 = x^2 + 16(x^2 - 1)^2 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2x - 32x = 0 \Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \text{ und aus (1) folgt } y = \pm \frac{3}{2}$$

Also hat $f(x, y)$ ein Minimum mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ bei

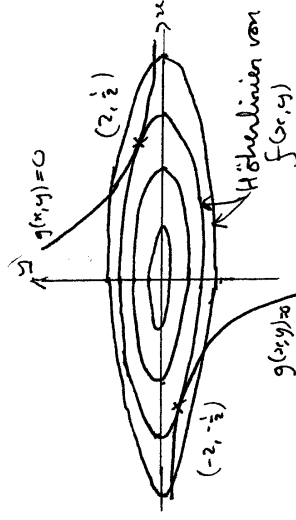
$$(2, \frac{3}{2}) \text{ und } (-2, -\frac{3}{2})$$

Die Höhenlinien von $f(x, y)$

sind Ellipsen. Der minimale

Wert von $f(x, y)$ auf $g(x, y) = 0$

ist $f(2, \frac{3}{2}) = 8$.



(b) Betrachte $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + 16y^2 + \lambda(x^2 - y - 1)$

mit $g(x, y) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow 32y + \lambda = 0 \Rightarrow 32y - \frac{2x^2}{y} = 0 \Rightarrow 16y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{4}x$$

$g(x, y) = 0$ muss erfüllt werden, also (5) in (1) einsetzen:

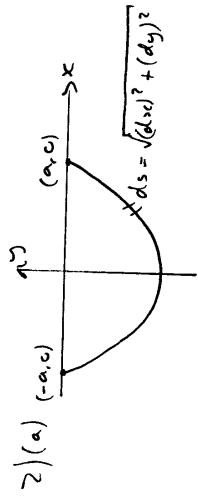
$$\pm \frac{1}{4}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \pm x^2 = 4$$

Offensichtlich gibt es nur eine Lösung für das obere Vorzeichen

$\Rightarrow$ unter Vorzeichen in (5) wegwerfen (Anfang des Lösungswegs)

Aus (6) und (5) folgt dann das Ergebnis (2).

Der Wert von λ ist nicht bedeutsam: da $g = 0$ könnte man $\lambda g(x, y)$ mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren, ohne F zu ändern, und dabei würde man das Ergebnis (4) für λ auch ändern. Häufig kann man ein Problem lösen, ohne den Wert von λ explizit zu berechnen.



Masse pro Längeneinheit = $\frac{m}{l}$

Linienelement ds hat potentielle Energie

$$dE = \frac{m}{l} ds g y = \frac{m}{l} y \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx \quad (7)$$

$$\text{Gesamtenergie } E = \int_{-a}^a \frac{m}{l} y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (8)$$

$$\text{Nebenbedingung: Kettenlänge} = \int_{-a}^a ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l = \text{Konstante} \quad (9)$$

$U_m E$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingung zu minimieren, bilde $E + \lambda l$ und minimiere dieses Funktional, wobei das Lagrange-Multiplikator danach zu eliminieren ist.

$$E + \lambda l = \int_{-a}^a \left[\frac{m}{l} y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right] dx \equiv \int_{-a}^a F(y, y', x) dx \quad (10)$$

$$\text{wobei } F(y, y', x) = \left(\frac{m}{l} y + \lambda \right) \sqrt{1 + y'^2} \quad (11)$$

$$F \text{ unabhängig von } x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = \text{Konstante} \quad (12)$$

NB: Betrachte Lagrange-Funktion für ein Teilchen in zeitunabhängigen Potential, $\lambda = \frac{1}{2} m v^2 - U(y)$

$$\lambda \text{ unabhängig von } t \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial y} y - \lambda = m v^2 - \lambda = \frac{1}{2} m v^2 + U(y) = \text{Konstante}$$

$\Rightarrow$ (12) entspricht Energieerhaltung in der Dynamik.

(11) in (12) einsetzen:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = \left(\frac{m}{l} y + \lambda \right) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \left(\frac{m}{l} y + \lambda \right) \sqrt{1 + y'^2} = -\frac{\left(\frac{m}{l} y + \lambda \right)}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{Konstante}$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{\frac{\left(\frac{m}{l} y + \lambda \right)^2}{A} - 1} \quad \text{mit } A = \text{Konstante} \quad (13)$$

(b) Trennung der Variablen: $\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{m}{l} y + \lambda \right)^2 - A^2}} = \int \frac{1}{A} dx \quad (14)$

Substitution (siehe Hinweis bei Blatt 4, Aufgabe 1):

$$\text{sei } \frac{m}{l} y + \lambda = A \cosh u \Rightarrow \frac{m}{l} dy = A \sinh u \, du$$

$$\text{und } \left(\frac{m}{l} y + \lambda \right)^2 - A^2 = A^2 \cosh^2 u - A^2 = A^2 \sinh^2 u$$

Damit folgt aus (14)

$$\int \frac{\frac{l}{mg} A \sinh u}{\frac{l}{2A} \sinh 2u} = \int \frac{1}{A} dx \Rightarrow \frac{1}{mg} \int du = \int \frac{1}{A} dx \Rightarrow \frac{u}{mg} = \frac{x}{A} + B$$

$$\Rightarrow \frac{l}{mg} \cosh^{-1} \left(\frac{mg}{2A} y + 1 \right) = \frac{x}{A} + B \Rightarrow y = \frac{1}{mg} \left[A \cosh \left(\frac{mg}{2A} \left(\frac{x}{A} + B \right) \right) - 1 \right] \quad (15)$$

Randbedingungen: $y(x) = 0 \Rightarrow 0 = A \cosh \left(\frac{mg}{2A} \left(\frac{x}{A} + B \right) \right) - 1$

$$y(x) = 0 \Rightarrow 0 = A \cosh \left(\frac{mg}{2A} \left(\frac{x}{A} + B \right) \right) - 1$$

mit $\cosh(-x) = \cosh x$ folgt $B = 0$, $y = A \cosh \frac{mg}{2A} x$

$$\Rightarrow y = \frac{lA}{mg} \left[\cosh \frac{mgx}{2A} - \cosh \frac{mgx}{2A} \right] \quad (16)$$

A wird durch die Nebenbedingung (9) bestimmt.

Einsetzen von (16) [besser: (13)] in (4) liefert die Transversale Gleichung

$$\frac{mg}{2A} = \sinh \frac{mg}{A} x \quad (17)$$

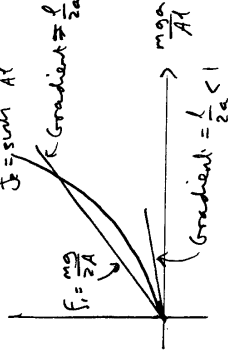
die A bestimmt. Es gibt keine

Lösung für $l < 2a$.

NB: In (16), (17) tauscht man die

Kombination $\frac{mg}{A}$ auf $\Rightarrow y(x)$ ist

unabhängig von m, g .



3) (a) $k = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{q}{r}$ ist unabhängig von t und (c)

• Homogenität der Zeit $\Rightarrow$ Energie E ist erhalten

• Isotropie des Raums (Invarianz von t unter Drehungen) $\Rightarrow$ Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \text{ ist erhalten}$$

3 Freiheitsgrade $\Rightarrow 2 \times 3 - 1 = 5$ Erhaltungsgrößen $\Rightarrow$ es fehlt noch eine.

Berechnen $\nabla \left(\frac{1}{r^2} \right)$ in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-2x}{r^3} \text{ und genauso für } \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla \frac{1}{r^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \frac{1}{r^2} = \frac{-2}{r^4} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) = \frac{-2 \vec{r}}{r^4} = \frac{-2 \vec{e}_r}{r^3} \quad (18)$$

(3) Betrachte $A = m \dot{r} \cdot \ddot{r} - 2Et \Rightarrow \frac{dA}{dt} = m \ddot{r} \cdot \dot{r} + m \dot{r} \cdot \ddot{r} - 2E - 2t \frac{dE}{dt}$ (19)

Bewegungsgleichung: $m \ddot{r} = -\nabla U(r) = -\alpha \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-\alpha}{r^4} \vec{r}$

Außerdem $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r)$ und $\frac{dE}{dt} = 0$

In (19) eingesetzt: $\frac{dA}{dt} = -\frac{2\alpha}{r^4} \dot{r} \cdot \vec{r} + m \dot{r}^2 - 2 \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) \right) = -\frac{2\alpha \dot{r}^2}{r^4} - 2U(r) = 0$

Damit ist A die jüngste Erhaltungsgröße (A entspricht einer „verstärkten Symmetrie“, die man mit der Gruppentheorie erfassen kann).

(b) Aus Blatt 4, Aufgabe 2 reduziert sich das System auf ein Teilchen

in eindimensionalen Potential $U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right) \frac{1}{r^2}$ (20)

- Falls $\frac{L^2}{2m} > \alpha$ braucht man $E > 0$

Kraft $F = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}$ drückt das Teilchen nach außen

$\Rightarrow r \rightarrow \infty$, Teilchen ist „frei“

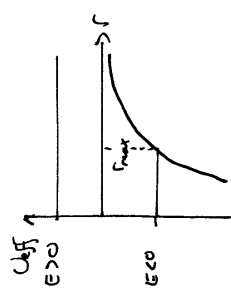
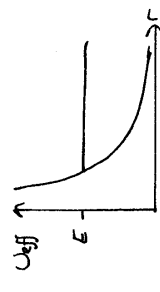
- Falls $\frac{L^2}{2m} < \alpha$ kann $E > 0$ oder $E < 0$ sein

$E > 0 \Rightarrow$ Teilchen geht gegen ∞ trotz der

Kraft nach innen

$E < 0 \Rightarrow r$ hat einen maximalen Wert

$\Rightarrow$ Teilchen ist „gebunden“



Energie $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{Konstante} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2 \left(E - \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right) \frac{1}{r^2} \right)}$ (21)

Trennung der Variablen:

$$\int \sqrt{\frac{2}{m}} dt = \int \frac{dr}{\sqrt{E - \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right) \frac{1}{r^2}}} = \int \frac{r dr}{\sqrt{E r^2 - \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right)}}$$
 (22)

Substituiere $u = E r^2 - \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right) \Rightarrow du = 2r dr \Rightarrow r dr = \frac{1}{2} du$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\frac{2}{m}} dt = \int \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}} t + B = \frac{1}{2} u^{1/2}$$

$$\Rightarrow E r^2 - \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right) = E \left(B + \sqrt{\frac{2}{m}} t \right)^2 \Rightarrow r^2 = E \left(B + \sqrt{\frac{2}{m}} t \right)^2 + \left(\frac{L^2}{2m} - \alpha \right)$$
 (23)

(c)* Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $E = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 - \dot{\varphi}^2 \right) < 0$ entsprechen einem gebundenen Teilchen (Siehe (b) für $\frac{L^2}{2m} < \alpha$, $E < 0$).

Ins (23) eingesetzt, um Integrationskonstante zu bestimmen:

$$r(0) = r_0 \Rightarrow r_0^2 = E r_0^2 + \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 - \dot{\varphi}^2 \right) = E r_0^2 + \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \dot{r} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2E}{m} t^2 + r_0^2$$

$$E < 0 \text{ also schreibe } E = -|E|: \quad \underline{\underline{r^2 = r_0^2 - \frac{2|E|}{m} t^2}} \quad (24)$$

$$\text{Teilchen erreicht den Ursprung bei } 0 = r_0^2 - \frac{2|E|}{m} t^2 \Rightarrow \underline{\underline{t = r_0 \sqrt{\frac{m}{2|E|}}}} \quad (25)$$

$$\text{Drehimpuls } L = m r^2 \dot{\varphi} \text{ ist konstant} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2} = \frac{L}{m r_0^2 - 2|E| t^2} \quad (26)$$

Mit wachsendem t nimmt r ab und $\dot{\varphi}$ wird immer größer $\Rightarrow$ das Teilchen spiralt in den Ursprung hinein.

Wenn es sich um ein reduziertes Zwei-Teilchen-Problem handelt, gibt es einen Stoß bei $r=0$. Wenn es sich aber um ein Teilchen in einem Potentialfeld handelt, spiralt das Teilchen wieder hinaus, bis es den maximalen Radius $r=r_0$ erreicht, und dann wiederholt sich das ganze. (Betrachte das Verhalten für $t < 0$: Invarianz unter $t \rightarrow -t$)

Wir können also froh sein, dass das Newtonsche Gravitationsgesetz $U = -\frac{GMm}{r}$ und nicht $U = -\frac{GMm}{r^2}$ lautet.

