Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

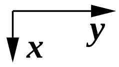
Sommersemester 2004
7.6.04
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/
howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 7 zur Theorie B

Da der 10. Juni ein Feiertag ist, findet das Beratungstutorium diese Woche am Mittwoch, dem 9. Juni von 13:00–15:00 Uhr statt.

1 Brachistochrone

Gleitet ein Körper reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer Kurve $y(x)$ von $A \equiv (0,0)$ nach $B \equiv (x_b, y_b)$, ist die dafür benötigte Zeit $T = \int_0^{x_b} \sqrt{[1 + y'^2(x)]/2gx}\, \mathrm{d}x$ minimiert für die Brachistochrone $x(\phi) = a(1 - \cos\phi)$, $y(\phi) = a(\phi - \sin\phi)$ mit $0 \leq \phi \leq \phi_{\max} \leq 2\pi$, wobei a und $\phi_{\max}$ durch die Randbedingungen bestimmt werden.



(a) Skizzieren Sie die Kurve. Wie ändert sich ϕ mit der Zeit?
Hinweis: Berechnen Sie T für variable Endpunkte mit $a = \mathit{const}$ und ϕ variable.

(b) Berechnen Sie $x(t)$ zu Beginn des Gleitens und die Gleitzeit T bis zum Minimum einer Half-Pipe [d.h. $B = (0, 2\pi a)$], sowie die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle = s/T$, wobei s die Bogenlänge bis zum Minimum ist. Vergleichen Sie mit einem freien Fall nach $(2a, 0)$.

(c)* Bonusaufgabe:
Wie lautet die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung für die generalisierte Koordinate ϕ auf der Brachistochrone ($a = \mathit{const}$)? Verifizieren Sie die Lösung aus (a).

2 Drehung des Perihels

Betrachten Sie einen Planeten (Masse m) im Schwerfeld der Sonne (Masse $M \gg m$). Die Relativitätstheorie verursacht eine Korrektur zum Newtonschen Gravitationsgesetz $F_{\mathrm{N}}(r) = -\frac{GMm}{r^2}$, die dafür sorgt, dass der Perihel des Planeten nicht konstant ist.

(a) Für ein beliebiges Zentralfeld $F(r)$ lässt sich die Bewegungsgleichung auf eine eindimensionale Bewegung im effektiven Potential reduzieren, $m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} + F(r)$. Überzeugen Sie sich, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}$ und benutzen Sie dies und die Substitution $u = 1/r$, um die Bewegungsgleichung als $\frac{L^2u^2}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\right) = -F(\frac{1}{u})$ zu schreiben.

(b) Die relativistische Masse m eines Körpers hängt von seiner Geschwindigkeit v ab, $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, mit m_0 die Ruhemasse und c die Lichtgeschwindigkeit. Zeigen Sie, dass die Zentralkraft nun die Form $F(r) \simeq -\frac{GMm_0}{r^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$ für $v \ll c$ annimmt, und bestimmen Sie $\alpha \ll 1$. *Hinweis:* Drittes Keplersche Gesetz mit Halbachse $a \simeq r$. Berechnen Sie $u(\phi)$ und bestimmen Sie, um wie viel sich der Perihel pro Umlauf dreht.

3 Zwei-Körper Problem

Die Relativbewegung zweier wechselwirkender Körper sei eine Ellipse. Skizzieren Sie die Bewegung der *beiden* Körper wenn der Schwerpunkt (i) ruht und (ii) sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Diskutieren Sie jeweils die Fälle von Gravitationswechselwirkung $V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{\alpha}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$ und von Feder-Wechselwirkung $V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{2}D|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2$.

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Montag, dem 14.6.04 —