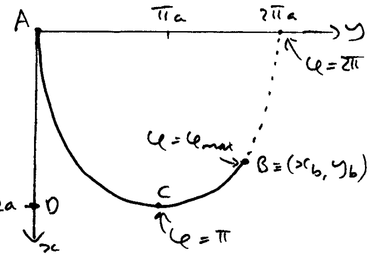
Blatt 7 – Lösungsskizze

1) (a) $x = a(1-\cos\varphi)$
$y = a(\varphi - \sin\varphi) \Rightarrow (x-a)^2 + (y - a\varphi)^2 = a^2$

$\Rightarrow$ Kreis mit Radius a, dessen Zentrum sich parallel zur y-Achse mit konstanter Geschwindigkeit bewegt – „Zykloide".



Für festes a und variable φ gilt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{a(1-\cos\varphi)}{a\sin\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{und } dx = a\sin\varphi\, d\varphi \qquad (1)$$

Gleitzeit
$$T = \int_0^{x_b} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\,dx = \int_0^{\varphi_{max}} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2}{2ga(1-\cos\varphi)}}\; a\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi_{max}} \sqrt{\frac{\sin^2\varphi + 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}{2ga(1-\cos\varphi)}}\; a\, d\varphi = \int_0^{\varphi_{max}} \sqrt{\frac{a}{g}}\, d\varphi = \underline{\underline{\sqrt{\frac{a}{g}}\,\varphi_{max}}} \qquad (2)$$

Für konstante a ist die Bahn festgelegt und φ_{max} bestimmt nur, wie weit der Körper entlang dieser Bahn gleitet. Aus (2) folgt dann

$$\underline{\underline{\varphi = \sqrt{\frac{g}{a}}\, t}} \qquad (3)$$

– der Winkel ändert sich kontinuierlich mit der Zeit.

(b) Für den freien Fall gilt

$$m\ddot{x} = mg \Rightarrow \underline{x = \tfrac{1}{2} g t^2} \quad (\text{mit } x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0) \qquad (4)$$

Zeit um $(2a, 0)$ zu erreichen: $t_{AD} = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \underline{\underline{2\sqrt{\frac{a}{g}}}}$ (5)

Mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle = \frac{2a}{t_{AD}} = \underline{\sqrt{ag}}$ (6)

Für die Half-Pipe gilt $B = (0, 2\pi a) \Rightarrow \varphi_{max} = 2\pi$

Aus (2) folgt sofort: Zeit bis zum Minimum $= t_{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi\sqrt{\frac{a}{g}}}}$ (7)

Bogenlänge bis zum Minimum $s_{AC} = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

$$\overset{(1)}{=} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2}\, a\sin\varphi\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi$$

nur $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ ($\underline{\text{Standardformel}}$! $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$)

$$\Rightarrow s_{AC} = a\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\left(1 - 2\sin^2\tfrac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} 2\sin\tfrac{\varphi}{2}\, d\varphi = a\left[-4\cos\tfrac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{4a}} \qquad (8)$$

Damit ist die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle = \frac{s_{AC}}{t_{AC}} = \underline{\underline{\frac{4}{\pi}\sqrt{ag}}}$ (9)

Vergleiche mit (6): die mittlere Geschwindigkeit ist größer bei der Brachistochrone als beim freien Fall, was vielleicht überraschend ist.

Rechtfertigung der Formel für $\langle v \rangle$: ~~eine~~ laut der Definition eines Mittels gilt
$$\langle v \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{x_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{s}{T}}}$$

$x(t)$ zu Beginn des Gleitens: aus $x(\varphi)$ und $\varphi = \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$ gilt für $\varphi \ll 1$

$$x(\varphi) = a(1-\cos\varphi) = a\left[1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \dots\right)\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2} g t^2 - \frac{g^2 t^4}{24a}}} \qquad (10)$$

Für sehr kurze Zeiten ist nur der erste Term relevant: $x(t)$ wie beim freien Fall (4). Generell ist aber $x(t)$ kleiner als beim freien Fall – offensichtlich, weil manche der kinetischen Energie sich bei $y(t)$ befindet.

(c) Lagrange-Funktion
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx$$
$$= \frac{1}{2} m\left[(a\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (a(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}\cos\varphi))^2\right] + mga(1-\cos\varphi)$$
$$= \underline{\underline{ma^2(1-\cos\varphi)\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{a}\right)}} \qquad (11)$$

Bewegungsgleichung für die generalisierte Koordinate φ:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[2\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)\right] = \sin\varphi\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{a}\right)$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{2\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi) + \sin\varphi\left(\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{a}\right) = 0}} \qquad (12)$$

Das Ergebnis (3) ist offensichtlich eine Lösung. Es gibt andere Lösungen (z.B. $\varphi = 0$), die aber die Randbedingungen nicht erfüllen.

2) (a) Drehimpuls $L = mr^2\dot{\varphi} = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{L}\,d\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}$

Bewegungsgleichung:
$$\frac{L^2}{mr^3} + F(r) = m\ddot{r} = m\frac{d}{dt}\frac{d}{dt} r = m\frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi} r\right) = \frac{L^2}{m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) \qquad (13)$$

Sei $r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{d}{d\varphi} r = \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$

In (13): $\frac{L^2u^2}{m} + F(\frac{1}{u}) = \frac{L^2}{m} u^2 \frac{d}{d\varphi}\left(u^2 \cdot -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\right) = -\frac{L^2}{m}u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{L^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right) = -F(\tfrac{1}{u})}} \quad (14)$$

(b) Die beiden Körper bewegen sich um den Schwerpunkt. Da $M \gg m$ liegt dieser aber fast bei der Sonne, die sich also kaum bewegt $\Rightarrow$ man muss nur die relativistische Korrektur zur Planetenmasse m berücksichtigen. ↳ und $\mu = \frac{Mm}{m+M} \approx m$

Falls $v \ll c \Rightarrow m(v) = m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx m_0\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$ (15)

Nun $v = r\omega$ und das dritte Keplersche Gesetz lautet $GM = a^3\omega^2$, wobei a die größere Halbachse der Ellipse ist (siehe z.B. Theorie A, Blatt 12, Aufgabe 2). So lange die Bahn nicht zu exzentrisch ist, gilt $r \approx a$

$\Rightarrow v = r\omega \approx r\sqrt{\frac{GM}{r^3}} \Rightarrow m(v) \approx m_0\left(1+\frac{GM}{2c^2r}\right) \equiv m_0\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)$ (16)

Newtonsches Gravitationsgesetz: $\underline{\underline{F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \approx -\frac{GMm_0}{r^2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right), \; \alpha = -\frac{GM}{2c^2}}}$ (17)

Die Bewegungsgleichung (14) lautet nun

$$\frac{L^2u^2}{m(v)}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right) = \frac{GMm(v)}{r^2} \Rightarrow L^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right) = GMu^2m^2(v) = GMu^2m_0^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u = \frac{GMm_0^2}{L^2}(1-\alpha u)^2 \simeq \frac{GMm_0^2}{L^2}(1-2\alpha u)$$

Sei $p^{-1} = \frac{GMm_0^2}{L^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u = \frac{1}{p}(1-2\alpha u) \Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(1+2\alpha\frac{1}{p}\right)u = \frac{1}{p}$ (18)

Dies ist nichts anderes als ein harmonischer Oszillator mit konstanter äußerer Kraft mit Oszillationsfrequenz $\underline{\omega_0^2 = 1+2\alpha/p}$ und $u_{part}(\varphi) = \frac{1}{p}\frac{1}{1+2\alpha/p} = \frac{1}{p+2\alpha}$ (19)

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $\underline{\underline{\frac{1}{r} = u = A\cos(\omega_0\varphi+\varphi_0) + \frac{1}{p+2\alpha}}}$ (20)

Wähle $\varphi_0 = 0$ (entspricht einer passenden Drehung der Koordinatenachsen).

Im nichtrelativistischen Limes $\alpha \to 0 \Rightarrow \omega_0 \to 1 \Rightarrow r = \frac{p}{1+Ap\cos\varphi}$ (21)

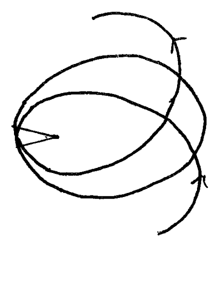
Dies ist der bekannte Kegelschnitt für die Bahn eines Teilchens im Newtonschen Gravitationsfeld (z.B. Theorie A, Blatt 11, Aufgabe 1), wie es sein sollte.

Exzentrizität $\epsilon = Ap \ll 1$ (oben angenommen) $\Rightarrow \underline{\underline{p \simeq r}}$

Verhalten des Perihels:

Beim Perihel nimmt r ein Minimum an $\Rightarrow u$ ist maximal $\Rightarrow \cos\omega_0\varphi = 1$

$\Rightarrow \varphi_{Perihel} = \frac{2\pi n}{\omega_0}$, $n \in \mathbb{N}$ (22)



$\Rightarrow$ Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perihelen $= \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(1+\frac{2\alpha}{p}\right)^{-1/2} \simeq 2\pi\left(1+\frac{2\alpha}{r}\right)^{-1/2} = 2\pi - \frac{2\pi\alpha}{r}$

Aber ein Umlauf entspricht $\Delta\varphi = 2\pi$

$\Rightarrow$ Perihel dreht sich um $-\frac{2\pi\alpha}{r} = \underline{\underline{\frac{GM\pi}{rc^2}}}$ (23)

Für Merkur: $r = 6\times10^{10}\,m$, und $G = 6.7\times10^{-11}\,m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$, $M = 2\times10^{30}\,kg$, $c = 3\times10^{8}\,m\,s^{-1}$

$\Rightarrow$ Drehung 7.8×10^{-8} rad / Umlauf $=$ <u>6.4 Bogensekunden / Jahrhundert</u>

(Umlaufperiode von Merkur $= 0.24$ Jahre)

Die beobachtete Drehung ist 43"/Jh, also ist dieses Ergebnis zu klein. Der Hauptbeitrag kommt von der Krümmung des Zeitraums (allgemeine Relativitätstheorie).

3) Aus Blatt 4, Aufgabe 2(a) $\vec{r}_1 = \frac{\vec{R}+\beta\vec{r}}{\alpha+\beta}$, $\vec{r}_2 = \frac{\vec{R}-\alpha\vec{r}}{\alpha+\beta}$ mit $\alpha = \frac{m_1}{m_1+m_2}$, $\beta = \frac{m_2}{m_1+m_2}$

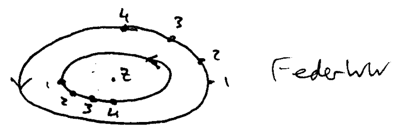
$\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$, $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$

Für die Gravitationswechselwirkung: $\vec{r}$ ist Ellipse mit Brennpunkt bei $\vec{R}$

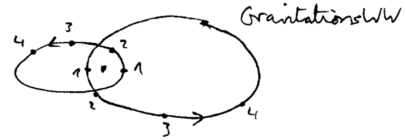
Für die Feder-Wechselwirkung: $\vec{r}$ ist Ellipse mit Zentrum bei $\vec{R}$

$\vec{R} = $ const $\Rightarrow \vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sind entgegengesetzt

relativ Betrag $\frac{|\vec{r}_2|}{|\vec{r}_1|} = \frac{m_1}{m_2}$

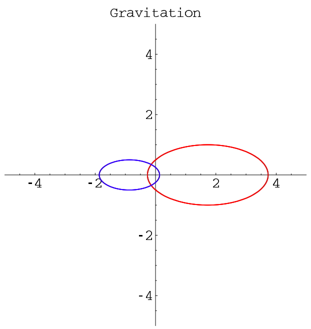


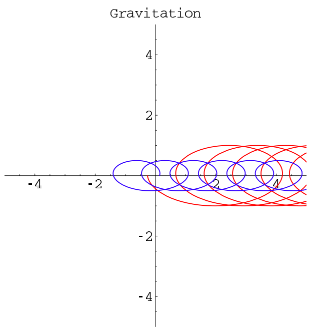
Es gibt meines Wissens kein einfaches Argument, warum der Schwerpunkt in einem Fall im Zentrum und im anderen Fall beim Brennpunkt liegt – man muss einfach die Bewegungsgleichungen lösen (Theorie A).

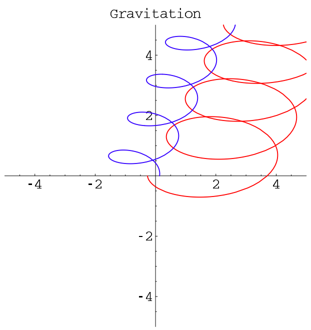


Gravitationswechselwirkung

(Schwerpunkt am Brennpunkt)







Federwechselwirkung

(Schwerpunkt im Zentrum)