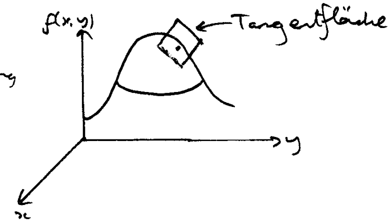
Blatt 8 – Lösungsskizze

1)(i) $f(x,y) = x^2 y - y^2 \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \underline{2xy\,dx + (x^2-2y)\,dy}$ (1)

$f(x,y)$ kann als Fläche betrachtet werden und dann bildet df die Tangentfläche zum Punkt (x,y) — df nähert das Verhalten der Funktion in der Nähe von (x,y).



Geht man einen Schritt dx in die x-Richtung und einen Schritt dy in die y-Richtung, ändert sich $f(x,y)$ um df.

(ii) Suche $f(x,y)$ mit $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (1-2x-2y)e^{-2x}dx + (2y+e^{-2x})dy$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int (1-2x-2y)e^{-2x}dx = (1-2y)\int e^{-2x}dx - 2\int x e^{-2x}dx$$

$$= (1-2y)\frac{e^{-2x}}{-2} - 2\left\{x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}dx\right\} = -\tfrac{1}{2}(1-2y)e^{-2x} + xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{-2} + c_1(y)$$

$$= (x+y)e^{-2x} + c_1(y) \quad (2)$$

wobei $c_1(y)$ eine Konstante bezüglich x ist, die von y abhängen darf

Aber es gilt auch

$$f(x,y) = \int (2y+e^{-2x})dy = y^2 + ye^{-2x} + c_2(x) \quad (3)$$

Vergleiche (2) und (3) und suchen $c_1(y)$ und $c_2(x)$; die Ausdrücke sind gleich wenn

$$c_1(y) = y^2 + A \quad , \quad c_2(x) = xe^{-2x} + A \quad , \quad A = \text{Konstante} \quad (4)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = (x+y)e^{-2x} + y^2 + A \quad (5)$$

also ist die Differentialform ein vollständiges Differential.

(iii) Suche $f(x,y)$ mit $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (x+y)dx + y^2dy$

$$\Rightarrow f(x,y) = \int (x+y)dx = \tfrac{1}{2}x^2 + xy + c_1(y) \quad (6)$$

und $f(x,y) = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + c_2(x)$ (7)

Es gibt kein $c_1(y), c_2(x)$ so, dass (6) und (7) gleich sind, also ist die Differentialform kein vollständiges Differential.

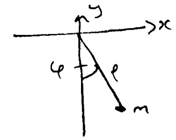
Äquivalent: $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ aber $\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1$ und $\frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0 \Rightarrow$ es existiert kein $f(x,y)$, das $(x+y)dx + y^2dy$ erzeugen könnte. Siehe Theorie A, Blatt 5, Aufgabe 1.

2) Kanonischer Impuls $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}$

Hamilton $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot q_i - \mathcal{L}$

Hamilton-Gleichungen $\dot p_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$ $\quad \dot q_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$

(a) i) Pendel: $q_i \to \varphi$ $\quad \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi$



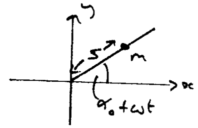
$$\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi \Rightarrow \mathcal{H} = p_\varphi\dot\varphi - \mathcal{L} = \underline{\frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi} \quad (8)$$

Energie $E = T + U = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 - mgl\cos\varphi \Rightarrow \underline{\underline{E = \mathcal{H}}}$

Hamilton-Gleichung: $\dot p_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \Rightarrow p_\varphi$ nicht erhalten (nicht zeitlich konstant)

Keine Überraschung: $p_\varphi \propto \dot\varphi$ und das Pendel schwingt mit $\varphi \propto \sin\omega t$ $\Rightarrow p_\varphi \propto \dot\varphi \propto \cos\omega t$.

ii) Perle auf einer rotierenden Stange: $q_i \to s$



$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m(\dot s^2 + \omega^2 s^2) - mgs\sin(\varphi_0 + \omega t)$$

$$\Rightarrow p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot s} = m\dot s \quad \Rightarrow \underline{\mathcal{H} = p_s\dot s - \mathcal{L} = \frac{p_s^2}{2m} - \frac{m}{2}\omega^2 s^2 + mgs\sin(\varphi_0+\omega t)} \quad (9)$$

Energie $E = T + U = \frac{1}{2}m(\dot s^2 + \omega^2 s^2) + mgs\sin(\varphi_0 + \omega t) \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{H} \neq E}}$

Die Hamilton ist nicht gleich der Energie. Dies kommt daher, dass die Stange mit vorgegebener Frequenz rotiert, und um das hinzukriegen, muss man Arbeit an die Stange (und damit an die Perle) leisten.

Hamilton-Gleichung: $\dot p_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = m\omega^2 s - mg\sin(\varphi_0 + \omega t)$

$\Rightarrow p_s$ nicht erhalten

Keine Überraschung: $p_s \propto \dot s$ und wir wissen schon, dass die Perle sich entlang der Stange bewegt. [Für $g = 0$ ist $\mathcal{L}$ unabhängig von $t \Rightarrow \mathcal{H}$ (aber nicht E!) ist erhalten – siehe Blatt 2, Aufgabe 3(b).]

(b) Zwei-Körper Problem mit $\vec R$ und $\vec r$

Verallgemeinerte Koordinate q_i: wähle kartesische Koordinaten für $\vec R$.

Für $\vec r$: Bewegung im Zentralfeld $\Rightarrow$ Drehimpuls ist erhalten (Noether) $\Rightarrow$ Bewegung findet in einer Ebene senkrecht zu $\vec L$ statt $\Rightarrow$ Polarkoordinaten (r, φ).

(Eigentlich sollte man Kugelkoordinaten (r, θ, φ) benutzen und dann stellt man aus den Hamiltongleichungen fest, dass $\theta = \frac{\pi}{2}$ sein muss $\Rightarrow$ nur r, φ relevant.)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \tfrac{1}{2}M(\dot R_x^2+\dot R_y^2+\dot R_z^2)+\tfrac{1}{2}\mu(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r)$$

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_x} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot R_x} = M\dot R_x \\ p_y &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_y} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot R_y} = M\dot R_y \\ p_z &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_z} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot R_z} = M\dot R_z \end{aligned}\right\}$$ Schwerpunkt verhält sich wie ein freies Teilchen, also bekommt man hier die Newtonschen Ausdrücke für den Impuls (10)

$$p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r} = \mu\dot r\ , \quad p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \mu r^2\dot\varphi \qquad (11)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \sum_i p_i\dot q_i - \mathcal{L} = \cancel{*}\, M\dot R_x\dot R_x + M\dot R_y\dot R_y + M\dot R_z\dot R_z + \mu\dot r\dot r + \mu r^2\dot\varphi\dot\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}M\dot R_x^2 + \tfrac{1}{2}M\dot R_y^2 + \tfrac{1}{2}M\dot R_z^2 + \tfrac{1}{2}\mu\dot r^2 + \tfrac{1}{2}\mu r^2\dot\varphi^2 + U(r) = \underline{\underline{\frac{p_x^2}{2M}+\frac{p_y^2}{2M}+\frac{p_z^2}{2M}+\frac{p_r^2}{2\mu}+\frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}+U(r)}} \qquad (12)$$

und damit $\underline{\underline{\mathcal{H}=E}}$

Hamilton-Gleichungen: $\dot p_x = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_x} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial R_x} = 0$, $\dot p_y = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial R_y} = 0$, $\dot p_z = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial R_z} = 0$

$\Rightarrow$ die kanonischen Impulse p_x, p_y, p_z sind erhalten – Impulserhaltung für ein freies Teilchen, nämlich den Schwerpunkt.

Weitere Hamilton-Gleichungen: $\dot p_r = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{\mu r^3} - U'(r)$ $(12\tfrac{1}{2})$

$\dot p_\varphi = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \mu r^2\dot\varphi$ = Drehimpuls ist erhalten.

Einsetzen von p_φ = Konstante in $(12\tfrac{1}{2})$, ~~und~~ Multiplikation mit p_r (= $\mu\dot r$ nach (11)) und integration bezüglich t führt zum üblichen Ausdruck für die Energie eines Teilchens im effektiven Potential.

3)(a) $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{p_y^2}{2m} - \omega x p_y$

$\Rightarrow \dot p_x = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -m\omega^2 x + \omega p_y$ (13) $\qquad \dot p_y = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = 0$ (14)

$\dot x = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$ (15) $\qquad \dot y = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - \omega x$ (16)

$\frac{d}{dt}(13) \Rightarrow \ddot p_x = -m\omega^2\dot x + \omega\dot p_y \overset{(14),(15)}{=} -p_x\omega^2 \Rightarrow \ddot p_x + \omega^2 p_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p_x = A\cos(\omega t+\varphi)}}$ (17)

$(15) \Rightarrow \dot x = \frac{A}{m}\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{A}{m\omega}\sin(\omega t+\varphi) + x_0}}$ (18)

$(14) \Rightarrow \dot p_y = 0 \Rightarrow p_y$ = Konstante $\Rightarrow \underline{\underline{p_y = mv_0}}$ (19)

$(16) \Rightarrow \dot y = \frac{p_y}{m} - \omega x = v_0 - \omega x_0 - \frac{A}{m}\sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow y = (v_0-\omega x_0)t + y_0 + \frac{A}{m\omega}\cos(\omega t+\varphi)$ (20)

Aber bei der Herleitung von (17) haben wir (13) abgeleitet und dabei den Wert der Konstante p_y verloren, also müssen wir noch nach Konsistenz prüfen:

$\frac{d}{dt}(15) \Rightarrow \ddot x = \frac{\dot p_x}{m} \overset{(13)}{=} -\omega^2 x + \frac{\omega}{m}p_y \Rightarrow \ddot x + \omega^2 x = \frac{\omega}{m}p_y$

Lösungen (18), (19) einsetzen $\Rightarrow \omega^2 x_0 = \omega v_0 \Rightarrow \underline{\underline{v_0 = \omega x_0}}$. ~~Damit~~ Daraus folgt

(19): $p_y = m\omega x_0$ (21)

(20): $\underline{\underline{y = y_0 + \frac{A}{m\omega}\cos(\omega t+\varphi)}}$ (22)

Alternativ hätte man ~~gleich~~ (13) in $\frac{d}{dt}(15)$ einsetzen können, und damit wäre die Integrationskonstante x_0 gleich mit v_0 verknüpft gewesen.

(b) ~~$\mathcal{H} \approx$~~ $\mathcal{H} = \sum_i p_i\dot q_i - \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = p_x\dot x + p_y\dot y - \mathcal{H}$ (23)

Zunächst kanonische Impulse p_x, p_y durch verallgemeinerte Koordinaten $x, \dot x, y, \dot y$ ausdrücken:

$(15) \Rightarrow p_x = m\dot x \qquad (16) \Rightarrow p_y = m(\dot y + \omega x)$ (24)

$$\Rightarrow \mathcal{L} = m\dot x^2 + m\dot y(\dot y+\omega x) - \left[\tfrac{1}{2}m\dot x^2 + \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot y^2 + 2\omega x\dot y + \omega^2x^2) - m\omega x(\dot y + \omega x)\right]$$

$$= m\dot x^2 + m\dot y^2 + m\omega x\dot y - \left[\tfrac{1}{2}m\dot x^2 + \tfrac{1}{2}m\dot y^2\right]$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}m\dot x^2 + \tfrac{1}{2}m\dot y^2 + m\omega x\dot y}} \qquad (25)$$

Vergleiche mit Blatt 5, Aufgabe 2:

(25) ist die Lagrange-Funktion für ein Teilchen im Magnetfeld mit Vektorpotential $\vec A_2 = A_0(0, x, 0)$, wobei $A_0 = m\omega$.

Es handelt sich also um ein Teilchen im Magnetfeld, wie man auch aus den Lösungen (18), (22) der Bewegungsgleichungen erraten könnte.

NB: Man würde ~~$*$~~ $\mathcal{H}$ normalerweise in der Form $\underline{\underline{\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - A_0x)^2}}$ (26) schreiben.