Universität Karlsruhe | Sommersemester 2004
Institut für Theorie der Kondensierten Materie | 21.6.04
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell | http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 | howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 9 zur Theorie B

1 Teilchen im Magnetfeld

Die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Ladung Q in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ lautet

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \tfrac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 + Q\, \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ das Vektorpotential mit $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \equiv \nabla \times \boldsymbol{A}$ ist.

(a) Geben Sie die Komponenten von $\boldsymbol{B}$ ausgedrückt durch die partiellen Ableitungen von $\boldsymbol{A}$ explizit an. Zeigen Sie, dass für ein Gradientenfeld $\boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \Phi$ gilt $\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 0$, und erklären Sie, warum die in Blatt 5, Aufgabe 2(a) angegebenen Vektorfelder alle zum selben $\boldsymbol{B}$ führen. Bestimmen Sie die Skalarfelder Φ, die die Felder $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ und $\boldsymbol{A}_3$ voneinander unterscheiden.

(b) Berechnen Sie den zu $\boldsymbol{r}$ gehörenden kanonischen Impuls $\boldsymbol{p}$ und drücken Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ durch die kanonischen Variablen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}$ aus. Bestimmen Sie die Energie des Teilchens (*Hinweis:* geleistete Arbeit) und vergleichen Sie mit $\mathcal{H}$.

2 Poisson-Klammern

(a) Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_i, x_j\}$ und $\{L_i, p_j\}$, wobei L_i die Komponenten des Drehimpulses $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = (L_x, L_y, L_z)$ sind und $i, j \in \{x, y, z\}$. Benutzen Sie ausschließlich dieses Ergebnis und die algebraischen Eigenschaften der Poisson-Klammern, um $\{L_i, L_j\}$ zu bestimmen.

(b) Zeigen Sie, dass $\{\mathcal{H}, L_i\} = 0$ für ein Teilchen im Zentralfeld, $\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U(|\boldsymbol{r}|)$. Was folgt daraus?
Hinweis: Benutzen Sie die algebraischen Rechenregeln der Poisson-Klammern und zeigen Sie $\{U(|\boldsymbol{r}|), \boldsymbol{L}\} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, wobei $\boldsymbol{F}$ die Kraft ist.

(c) $f_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ und $f_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ seien Erhaltungsgrößen. Zeigen Sie, dass dann auch $f_3 = \{f_1, f_2\}$ erhalten ist.

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Montag, dem 28.6.04 —