Blatt 9 – Lösungsskizze

1)(a)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Sei $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$ (2)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y & \partial\phi/\partial z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\vec{e}_z = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\phi = 0 \ \forall \phi}} \qquad (3)$$

Betrachte zwei Vektorpotentiale $\vec{A}$ und $\tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$. Zugehörige Magnetfelder:

$$\tilde{\vec{B}} = \text{rot}\,\tilde{\vec{A}} = \text{rot}\,\vec{A} + \underbrace{\text{rot}\,\nabla\phi}_{=0} = \text{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$$

$\Rightarrow$ zwei Vektorpotentiale, die sich nur von einem Gradientenfeld $\nabla\phi$ unterscheiden, führen zum selben B-Feld.

Betrachte Felder aus Blatt 5, Aufgabe 2(a):

$\vec{A}_1 = A_0(-y, 0, 0) \qquad \vec{A}_2 = A_0(0, x, 0) \qquad \vec{A}_3 = A_0(-\frac{1}{4}y, \frac{3}{4}x, 0)$

$\Rightarrow \vec{A}_2 - \vec{A}_1 = A_0(y, x, 0) \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = A_0 y \Rightarrow \phi = A_0 xy + c_1(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = A_0 x \Rightarrow \phi = A_0 xy + c_2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \phi = A_0 xy \Rightarrow \underline{\underline{\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}(A_0 xy)}} \qquad (4)$$

Analog $\underline{\underline{\vec{A}_3 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}(\frac{3}{4}A_0 xy)}}$ (5)

(b) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + Q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + Q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$ (6)

$\Rightarrow p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + QA_x$ usw. $\Rightarrow \underline{\underline{\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + Q\vec{A}}}$ (7)

$\Rightarrow \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{r}} - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = (m\dot{\vec{r}} + Q\vec{A})\cdot\dot{\vec{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - Q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \underline{\underline{\frac{(\vec{p} - Q\vec{A})^2}{2m}}}$ (8)

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$

Potentielle Energie: Die Lorentzkraft $\vec{F}_L$ besitzt kein Potential, also muss man die Energie für jede Bahn (sprich Anfangsbedingungen) durch Berechnung der geleisteten Arbeit bestimmen:

$W = \int \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_L \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = 0$ da $\vec{F}_L \cdot \dot{\vec{r}} = Q(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{B})\cdot\dot{\vec{r}} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\text{Energie} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \mathcal{H}}}$ (9)

Obwohl (8) ungewöhnlich aussieht, ist es die Gesamtenergie.

2)(a) Poisson-Klammern: $\{A, B\} = \sum_k \left[\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial x_k} - \frac{\partial A}{\partial x_k}\frac{\partial B}{\partial p_k}\right]$ (10)

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \qquad (11)$$

$\{L_i, x_j\} = \sum_k \left[\frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial x_j}{\partial x_k} - \frac{\partial L_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right]$ aber $\frac{\partial x_j}{\partial p_k} = 0$, $\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

$= \sum_k \left[\frac{\partial L_i}{\partial p_k}\delta_{jk} - 0\right] = \frac{\partial L_i}{\partial p_j}$ (12)

$\Rightarrow \{L_x, y\} = \frac{\partial L_x}{\partial p_y} = -z \qquad \{L_y, z\} = \frac{\partial L_y}{\partial p_z} = -x \qquad \{L_z, x\} = \frac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y$

$\{L_y, x\} = \frac{\partial L_y}{\partial p_x} = z \qquad \{L_z, y\} = \frac{\partial L_z}{\partial p_y} = x \qquad \{L_x, z\} = \frac{\partial L_x}{\partial p_z} = y$

und $\{L_x, x\} = \{L_y, y\} = \{L_z, z\} = 0$

$\Rightarrow \{L_i, x_j\} = -x_k$ für $(i, j, k) = (x, y, z)$ und zyklische Permutationen

$\{L_j, x_i\} = -\{L_i, x_j\}$

$\{L_i, x_i\} = 0$ (13)

Mit dem ε-Tensor zusammengefasst: $\underline{\underline{\{L_i, x_j\} = -\sum_k \varepsilon_{ijk} x_k}}$ (14)

$\{L_i, p_j\} = \sum_k \left[\frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial x_k} - \frac{\partial L_i}{\partial x_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}\right]$ aber $\frac{\partial p_j}{\partial x_k} = 0$, $\frac{\partial p_j}{\partial p_k} = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

$= \sum_k \left[0 - \frac{\partial L_i}{\partial x_k}\delta_{jk}\right] = -\frac{\partial L_i}{\partial x_j}$ (15)

Analog zur Rechnung für $\{L_i, x_j\}$ bekommt man

$$\{L_i, p_j\} = -p_k \quad \text{mit} \quad (i,j,k) = (x,y,z) \text{ und zyklischen Permutationen}$$
$$\{L_j, p_i\} = -\{L_i, p_j\} \qquad (16)$$
$$\{L_i, p_i\} = 0$$

Zusammengefasst: $\underline{\underline{\{L_i, p_j\} = -\sum_k \varepsilon_{ijk} p_k}}$ (17)

Relevante algebraische Regeln:

$$\left.\begin{aligned} \{A, BC\} &= B\{A,C\} + \{A,B\}C \\ \{AB, C\} &= A\{B,C\} + \{A,C\}B \\ \{A, B+C\} &= \{A,B\} + \{A,C\} \end{aligned}\right\} (18)$$

Nun $\{L_x, L_y\} = \{L_x, zp_x - xp_z\} = \{L_x, zp_x\} - \{L_x, xp_z\}$

$$= z\underbrace{\{L_x, p_x\}}_{=0} + \underbrace{\{L_x, z\}}_{=y} p_x - x\underbrace{\{L_x, p_z\}}_{p_y} - \underbrace{\{L_x, x\}}_{=0} p_z = yp_x - xp_y = \underline{\underline{-L_z}}$$

und analog $\{L_y, L_z\} = -L_x$, $\{L_z, L_x\} = -L_y$.

Außerdem $\{L_y, L_x\} = -\{L_x, L_y\}$ usw. und trivialerweise $\{L_x, L_x\} = 0$.

Also
$$\{L_i, L_j\} = -L_k \quad \text{für} \quad (i,j,k) = (x,y,z) \text{ und zyklische Permutationen}$$
$$\{L_j, L_i\} = -\{L_i, L_j\} \qquad (19)$$
$$\{L_i, L_i\} = 0$$

Zusammengefasst: $\underline{\underline{\{L_i, L_j\} = -\sum_k \varepsilon_{ijk} L_k}}$ (20)

(b) Betrachte zunächst mit Hilfe von (18)

$$\{\vec{p}^2, L_x\} = \sum_{k=x,y,z} \{p_k^2, L_x\} = \sum_{k=x,y,z} 2p_k\{p_k, L_x\} = -2\sum_{k=x,y,z} p_k\{L_x, p_k\}$$

$$= -2\Big[p_x\underbrace{\{L_x, p_x\}}_{=0} + p_y\underbrace{\{L_x, p_y\}}_{=-p_z} + p_z\underbrace{\{L_x, p_z\}}_{=p_y}\Big] = -2(-p_yp_z + p_zp_y) = \underline{\underline{0}} \qquad (21)$$

Damit
$$\{\mathcal{H}, L_x\} = \left\{\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(|\vec{r}|), L_x\right\} = \{U(|\vec{r}|), L_x\}$$
$$= \sum_{k=x,y,z}\Big[\underbrace{\frac{\partial U}{\partial p_k}}_{=0}\frac{\partial L_x}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial L_x}{\partial p_k}\Big] \qquad (22)$$

Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow F_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k}$ in (22) einsetzen:

$$\{\mathcal{H}, L_x\} = \sum_{k=x,y,z} F_k \frac{\partial L_x}{\partial p_k} = -zF_y + yF_z \qquad (23)$$

und analog $\{\mathcal{H}, L_y\} = -xF_z + zF_x$, $\{\mathcal{H}, L_z\} = -yF_x + xF_y$

$$\Rightarrow \{\mathcal{H}, L_i\} = x_jF_k - x_kF_j \quad \text{mit} \quad (i,j,k) = (x,y,z) \text{ und zyklischen Permutationen}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{\mathcal{H}, L_i\} = \{U(|\vec{r}|), L_i\} = \vec{r} \wedge \vec{F}}} \qquad (24)$$

Aber in einem Zentralpotential gilt $\vec{r} \wedge \vec{F} = 0$ da

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(|\vec{r}|) = -\frac{dU(r)}{dr}\vec{\nabla}(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

also $\vec{F}$ ist parallel zu $\vec{r}$.

$$\Rightarrow \underline{\{\mathcal{H}, L_i\} = 0} \qquad (25)$$

Die Poisson-Klammer bestimmt die zeitliche Änderung einer Größe, $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{\mathcal{H}, A\}$, also entspricht (25) die Erhaltung des Drehimpulses in einem Zentralpotential ($\vec{L}$ erhalten sogar wenn $U(r)$ zeitabhängig!).

(c) Jacobi-Identität:

$$\{A, \{B,C\}\} + \{B, \{C,A\}\} + \{C, \{A,B\}\} = 0 \qquad (26)$$

Erhaltung von $f_3 = \{f_1, f_2\}$ folgt aus

$$\frac{df_3}{dt} = \{\mathcal{H}, f_3\} = \{\mathcal{H}, \{f_1, f_2\}\} = -\{f_1, \underbrace{\{f_2, \mathcal{H}\}}_{\substack{=0 \text{ da } f_2 \\ \text{erhalten}}}\} - \{f_2, \underbrace{\{\mathcal{H}, f_1\}}_{\substack{=0 \text{ da } f_1 \\ \text{erhalten}}}\} = \underline{\underline{0}} \qquad (27)$$

Wenn man zwei Erhaltungsgrößen kennt, kann man nach diesem Verfahren versuchen, eine dritte zu bestimmen (oft ist die dritte aber entweder schon bekannt oder trivial).

Beispiel:
Betrachte ein System in dem die Drehimpulskomponenten L_x und L_y erhalten sind. Dann ist $\{L_x, L_y\} = -L_z$ [siehe (20)] auch erhalten, und damit muss $\vec{L}$ konstant sein.