

Blatt 10 - Lösungsskizze

1) (a) Aus Blatt 9, Aufgabe 1 lautet die Hamilton-Funktion für ein Teilchen im Magnetfeld $\mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}$ ($q = \text{Ladung}$, $\vec{A} = \text{Vektorpotential}$)

Mit einem Coulombfeld $U(\vec{r}) = U(r)$ ergibt sich

$$\mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + U(r) = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r)}_{\mathcal{H}_0} - \underbrace{\frac{q}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}}_{\mathcal{H}_1} + \underbrace{\frac{q^2}{2m} \vec{A}^2}_{\mathcal{H}_2} \quad (1)$$

Symmetrische Eichung: $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & B_0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} B_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (2)

Nun $\vec{p} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p})$ (zyklische Eigenschaft des

Skalarproduktes) und $\vec{A}^2 = \frac{1}{4} B_0^2 (x^2 + y^2)$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r)}_{\mathcal{H}_0} - \underbrace{\frac{q}{2m} (\vec{r} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{B}}_{\mathcal{H}_1} + \underbrace{\frac{q^2 B_0^2}{8m} (x^2 + y^2)}_{\mathcal{H}_2} \quad (3)$$

$\mathcal{H}_1$ ist der Form $\mathcal{H}_1 = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ mit $\vec{M} = \frac{q}{2m} (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{q}{2m} \vec{L}$ (4)

$\vec{M}$ ist das magnetische Dipolmoment.

(b) Erhaltung von L_i wird durch die Poisson-Klammern gegeben:

$$\frac{dL_i}{dt} = \{ \mathcal{H}, L_i \} = \{ \mathcal{H}_0, L_i \} + \{ \mathcal{H}_1, L_i \} + \{ \mathcal{H}_2, L_i \} \quad (5)$$

Aus Blatt 9, Aufgabe 2 gilt für den kanonischen Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

$$\{ \mathcal{H}_0, L_i \} = 0 \quad \{ \mathcal{H}_1, L_i \} = \{ -\vec{M} \cdot \vec{B}, L_i \} = -\frac{q}{2m} \{ \vec{L} \cdot \vec{B}, L_i \} = -\frac{q B_0}{2m} \{ L_z, L_i \} \quad (6)$$

wobei $\{ L_i, L_j \} = -\sum_k \epsilon_{ijk} L_k$

Es bleibt nur noch der letzte Term in (5) zu berechnen.

$$\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x} = \frac{q^2 B_0^2}{4m} x \quad \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial y} = \frac{q^2 B_0^2}{4m} y \quad \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial p_i} = 0 \quad (7)$$

$$L_x = y p_z - z p_y \quad L_y = z p_x - x p_z \quad L_z = x p_y - y p_x \quad (8)$$

$$\{ \mathcal{H}_2, L_i \} = \sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial p_k} \frac{\partial L_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial q_k} \frac{\partial L_i}{\partial p_k} \right] = -\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x} \frac{\partial L_i}{\partial p_x} - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial y} \frac{\partial L_i}{\partial p_y} \quad (9)$$

(7) und (8) in (6) einsetzen:

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{H}_2, L_x \} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial y} \frac{\partial L_x}{\partial p_y} = +\frac{q^2 B_0^2}{4m} y z \\ \{ \mathcal{H}_2, L_y \} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x} \frac{\partial L_y}{\partial p_x} = -\frac{q^2 B_0^2}{4m} x z \\ \{ \mathcal{H}_2, L_z \} &= -\frac{q^2 B_0^2}{4m} x \cdot (-y) - \frac{q^2 B_0^2}{4m} y \cdot x = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(5), (6) und (10) zusammenfassen:

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{q B_0}{2m} L_y + \frac{q^2 B_0^2}{4m} y z \quad \frac{dL_y}{dt} = -\frac{q B_0}{2m} L_x - \frac{q^2 B_0^2}{4m} x z \quad \frac{dL_z}{dt} = 0 \quad (11)$$

Offensichtlich ist nur L_z erhalten.

Untersuche $\vec{L}^2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{L}^2)}{dt} &= \{ \mathcal{H}, \vec{L}^2 \} = \sum_i \{ \mathcal{H}, L_i^2 \} = \sum_i 2 L_i \{ \mathcal{H}, L_i \} = \sum_i 2 L_i \frac{dL_i}{dt} \\ &= 2 L_x \left(\frac{q B_0}{2m} L_y + \frac{q^2 B_0^2}{4m} y z \right) + 2 L_y \left(-\frac{q B_0}{2m} L_x - \frac{q^2 B_0^2}{4m} x z \right) = -\frac{q^2 B_0^2}{2m} (x L_y - y L_x) \neq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

also ist $\vec{L}^2(t)$ nicht erhalten.

(c) Schwaches Magnetfeld $\Rightarrow \mathcal{H}_2 \ll \mathcal{H}_1 \Rightarrow$ alle Terme in $\mathcal{H}_2$ vernachlässigen.

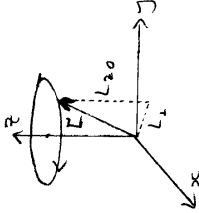
Aus (11), (12) folgt dann

$$L_x = \frac{1}{2} \omega_L L_y \quad L_y = -\frac{1}{2} \omega_L L_x \quad L_z = 0 \quad \frac{d}{dt}(\vec{L}^2) = 0, \quad \omega_L = \frac{q B_0}{m} \quad (13)$$

In dieser Näherung ist der Gesamtdrehimpuls erhalten und

$$L_{xc} = \frac{1}{2} \omega_L L_y = -\frac{1}{4} \omega_L^2 L_x \Rightarrow L_{xc} = L_x \sin\left(\frac{\omega_L t}{2} + \varphi\right), \quad L_y = L_x \cos\left(\frac{\omega_L t}{2} + \varphi\right), \quad L_z = L_{z0} \quad (14)$$

Die Komponenten von $\vec{L}$ bilden einen Kreis, der mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_L = \frac{e B}{2m}$ („Larmor-Frequenz“) um die B -Achse rotiert und dessen Betrag konstant ist.



Bemerkung: Der kanonische Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ ist keine messbare Größe, da er von der Wahl von $\vec{A}$ (d.h. von der Eichung) abhängt. Der messbare Drehimpuls eines Teilchens im Magnetfeld ist der kinetische Drehimpuls $\vec{D} = m \vec{r} \wedge (\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A})$, dessen Komponenten aber nicht erhalten sind (auch nicht unter Vernachlässigung von $\mathcal{H}_2$). $\vec{L}$ ist gerade interessant und nützlich, weil $|\vec{L}|$ erhalten ist - es ist ~~ist~~ inner halbwegs die Erhaltungsgroßen zu kennen, auch wenn man sie physikalisch nicht interpretieren kann.

(3)

2(a) Lagrangefunktion: $\mathcal{L}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} m \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} c [(u_1 - u_2)^2 + (u_1 - u_2)^2]$ (15)

Bewegungsgleichung aus $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k}$

$\Rightarrow \ddot{u}_1 + \frac{c}{m} (u_1 - u_2) = 0$
 $\ddot{u}_2 + \frac{c}{M} (2u_1 - u_2 - u_2) = 0$
 $\ddot{u}_3 + \frac{c}{m} (u_3 - u_2) = 0$ (16)

Exponentialansatz $u_k(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} a_k e^{i\omega t}$ einsetzen und mit $\sqrt{m}$ durchmultiplizieren:

$a_1 \omega^2 = \frac{c}{m} a_1 - \frac{c}{\sqrt{m}} a_2$
 $a_2 \omega^2 = -\frac{c}{\sqrt{m}} a_1 + \frac{2c}{M} a_2 - \frac{c}{\sqrt{m}} a_3$
 $a_3 \omega^2 = -\frac{c}{\sqrt{m}} a_2 + \frac{c}{m} a_3$ (17)

Definiere $\underline{u} = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $K = \sqrt{\frac{c}{m}}$ und schreibe (17) in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K^2 - K & -K \\ 0 & -K & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \equiv D \underline{a} = \omega^2 \underline{a}$$
 (18)

(b) Das homogene Gleichungssystem (17) ist äquivalent zur Matrixgleichung (18), und es existiert nur dann eine nichttriviale Lösung für $\underline{a}$, falls

$\det(D - \omega^2 I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \omega^2 - \omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K^2 - \omega^2 - K & -K \\ 0 & -K & \omega^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$
 $\Rightarrow (\omega^2 - \omega^2) [2K^2 - \omega^2 - K - \omega^2] + K^2 (-K) (\omega^2 - \omega^2) = 0$
 $\Rightarrow (\omega^2 - \omega^2) [\omega^2 - \omega^2 (K^2 + 2K^2)] = 0 \Rightarrow \omega^2 = 0, K^2, K^2 + 2K^2$ (19)

Testet die Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten (19) bilden.

$\omega^2 = 0 \equiv \omega_1^2$
 (18) liefert $K a_1 - K a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = K a_2$
 $-K a_2 + K^2 a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = K a_2$ und a_2 bleibt unbestimmt.

$\Rightarrow$ Eigenvektor $\underline{a}_1 = c_1 \begin{pmatrix} K/K \\ 1/K \\ 1/K \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\omega_1^2 = 0$
 ($c_1 = \text{Konstante}$) (20)

(4)

(ii) $\omega^2 = K^2 \equiv \omega_2^2$
 (18) liefert $a_2 = 0, a_1 = -a_3 \Rightarrow$ Eigenvektor $\underline{a}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, c_2 = \text{Konstante}$ (21)

(iii) $\omega^2 = K^2 + 2K^2 \equiv \omega_3^2$
 (18) liefert $a_1 = -\frac{K}{2K} a_3, a_2 = -\frac{K}{2K} a_3 = a_1$ und a_2 bleibt unbestimmt.
 $\Rightarrow$ Eigenvektor $\underline{a}_3 = c_3 \begin{pmatrix} -1/2K \\ 1 \\ -1/2K \end{pmatrix}, c_3 = \text{Konstante}$ (22)

Orthogonalität der Eigenvektoren:

$\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 = c_1 c_2 \begin{pmatrix} K/K \\ 1 \\ K/K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$
 $\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_3 = c_1 c_3 \begin{pmatrix} K/K \\ 1 \\ K/K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2K \\ 1 \\ -1/2K \end{pmatrix} = 0$
 $\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 = c_2 c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2K \\ 1 \\ -1/2K \end{pmatrix} = 0$
 $= 0$

(c) Die Ausbreitung ist durch den Ansatz $u_k = \frac{1}{\sqrt{m}} a_k e^{i\omega t}$ bestimmt, wobei a_k die k-te Komponente des Eigenvektors $\underline{a}$ ist. Die allgemeine Lösung ist dann die lineare Kombination über alle Eigenvektoren:

$$\text{Re}[\underline{u}(t)] = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} K/K \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} K/K \end{pmatrix} c_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix} c_2 e^{i\omega_2 t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix} c_3 e^{i\omega_3 t} \right]$$

Nun $\frac{K}{c} = \sqrt{\frac{c}{m}}$ und $c_i \in \mathbb{C}$ also schreibe $c_i = \delta_i e^{i\varphi_i}$:

$$\text{Re}[\underline{u}(t)] = \text{Re} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} K/K \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} K/K \end{pmatrix}}_{\underline{\beta}_1} c_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix}}_{\underline{\beta}_2} c_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix}}_{\underline{\beta}_3} c_3 e^{i(\omega_3 t + \varphi_3)} \right]$$

 $= \underline{\beta}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \underline{\beta}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \underline{\beta}_3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$ (23)

Hierbei sind $\omega_1 = 0, \omega_2 = K, \omega_3 = \sqrt{K^2 + 2K^2}$

Im ersten Term fällt die Zeitabhängigkeit weg, da $\omega_1 = 0$, und $\cos(0) = 1$, kann in die Konstante β_1 absorbiert werden $\Rightarrow$ nur fünf Integrationskonstanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \varphi_2, \varphi_3$ (24)

Die Bewegungsgleichungen bestehen aus 3 DGL zweiter Ordnung $\Rightarrow$ man erwartet 6 Integrationskonstanten.

Nun entspricht die Lösung $\vec{u}_i = \beta_i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einem ruhenden Molekül (β_i bestimmt die Position auf der x-Achse), wozu wir wegen Galilei-Invarianz eine gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes geben können: die Gleichungen (16) werden auch gelöst durch $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (u_0 + v_0 t)$ (17)

Damit ist die vollständige Lösung

$$\vec{u}(t) = (u_0 + v_0 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/m \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (26)$$

Physikalische Interpretation:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Translation des Moleküls $\Rightarrow$ Schwerpunkt hat konstante Geschw.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ gegenphasige Schwingung der Außensteine, während ~~sich~~ des Zentrals rührt.

$$\omega_2 = \sqrt{c/m}$$

Offenbar bewegt sich der Schwerpunkt nicht

$\begin{pmatrix} -1/m \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Die Außensteine schwingen gleichphasig mit gleicher Amplitude und das Zentralatom schwingt dagegen. Der Schwerpunkt $U(t)$ bewegt sich nicht:

$$\omega_2 = \sqrt{c(\frac{1}{m} + \frac{1}{5m})}$$

$$U(t) = \frac{m \cdot \beta_2 \cos(\dots) + M \cdot \frac{-2m}{M} \beta_2 \cos(\dots) + m \cdot \beta_2 \cos(\dots)}{m + M + m} = 0$$

$\omega_2 > \omega_1$ da die Bewegung des Zentrals dafür sorgt, dass größere Kräfte auf die Feder ausgeübt werden.

Für beliebige Integrationskonstanten $u_0, \beta_1, \varphi_1, \beta_2, \varphi_2$ setzt sich der Schwerpunkt mit konstanter Geschwindigkeit fort. Das muss sein, da man (analog zum Zwei-Körper-Problem) eine Variablentransformation machen kann, die die Lagrangefunktion in eine wechsellagerungsfreie Schwerpunktfunktion und einen Restanteil spaltet.