Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Mo 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

Sommersemester 2004
5.7.04
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/
howell@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 11 zur Theorie B

1 Transponierte einer Matrix

Die Transponierte $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ einer Matrix $\boldsymbol{M}$ ist definiert als $(\boldsymbol{M}^{T})_{ik} = \boldsymbol{M}_{ki}$. Beweisen Sie $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\cdots\boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

2 Allgemeines gekoppeltes System

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Potential für zwei gekoppelte Oszillatoren als

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} C_{kl}\,u_k\,u_l \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{u}) \tag{1}$$

geschrieben werden kann, wobei u_i die Auslenkung aus dem Gleichgewicht bezeichnet. In dieser Aufgabe sei $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2$ von $\boldsymbol{C}$. Bilden Sie die Matrix $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2)$, deren Spalten aus den Eigenvektoren bestehen, und zeigen Sie, dass $\boldsymbol{U}$ eine orthogonale Matrix ist: $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{1}$.

(b) Führen Sie neue Koordinaten q_1, q_2 ein über $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{q} \;\Leftrightarrow\; u_i = \sum_{k=1}^{2} U_{ik}\,q_k$. Wie sieht das Potential $V(q_1, q_2)$ in den neuen Koordinaten aus?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{C}}\,\boldsymbol{q})$ mit $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{U}$.
Wenn u_1, u_2 durch x, y gegeben sind, wie lauten dann $q_1(x, y)$ und $q_2(x, y)$?
Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem und einige Äquipotentiallinien von $V(q_1, q_2)$.

(c) Die kinetische Energie sei gegeben durch $T(\dot{u}_1, \dot{u}_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} m_k\,(\dot{u}_k)^2$. Geben Sie $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$ als Funktion von $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ an.
Es sei nun $m_k = m$. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen für die $q_i(t)$, und geben Sie die allgemeine Lösung für $q_i(t)$ sowie $u_i(t)$ an.

Kurzfragen zur Wiederholung vor der Klausur (ohne Kreuze)

- Was ist eine Trägheitskraft?
- Erklären Sie das Prinzip der kleinsten Wirkung.
- Variationsproblem: Wie bestimmt man die Kurve $f(x, x', t)$, die die Größe $F = \int f(x, x', t)\,\mathrm{d}x$ minimiert? Wie berücksichtigt man Randbedingungen dabei?
- Welche Erhaltungsgrößen sind erhalten, wenn $\mathcal{L}$ invariant unter Zeitverschiebung / Raumverschiebungen / Drehungen ist?
- Wie lautet $\mathcal{L}$ für ein Teilchen im Potential / im Magnetfeld?
- Was sind kanonische Koordinaten? Wenn man $\mathcal{L}$ kennt, wie bestimmt man $\mathcal{H}$?
- Wie bestimmt man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix? Welche Eigenschaften haben sie?

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Montag, dem 12.7.04 —