

⑤

In den neuen Koordinaten q_i hat V eine viel einfachere Form als in den alten Koordinaten u_i .

Um $q_i(u_1, u_2)$ zu bestimmen, muss man die Koordinatentransformation umkehren:

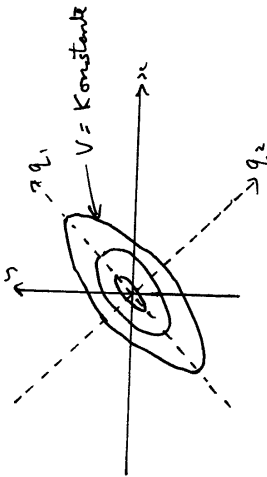
$$\vec{u} = U\vec{q} \Rightarrow \vec{q} = U^{-1}\vec{u} = U^T\vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 - u_2) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Falls $u_1 = x, u_2 = y$ gilt also $\underline{q_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, q_2 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}}$ (14)

Die neuen Koordinaten stehen senkrecht aufeinander, um $\frac{\pi}{4}$ bezüglich der x, y -Achsen gedreht.

Äquipotentiallinien: $V(q_1, q_2) = \text{const} = V \Rightarrow \frac{1}{2} \lambda_1 q_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 q_2^2 = V$

$$\Rightarrow \frac{q_1^2}{2V/\lambda_1} + \frac{q_2^2}{2V/\lambda_2} = 1 \Rightarrow \frac{q_1^2}{V} + \frac{q_2^2}{V/3} = 1 \Rightarrow \text{Ellipsen} \quad (15)$$



(c) Einsetzen der Koordinatentransformation in die kinetische Energie:

$$u_k = \sum_i U_{ki} q_i \Rightarrow \dot{u}_k = \sum_i U_{ki} \dot{q}_i \quad (16)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{u}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \left(\sum_j U_{ij} \dot{q}_j \right) \left(\sum_l U_{il} \dot{q}_l \right) = \frac{1}{2} \sum_{ijl} \dot{q}_j \dot{q}_l \left(\sum_i m_i U_{ij} U_{il} \right) = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} \cdot U^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} U \dot{\vec{q}} \quad (17)$$

Für den Fall $m_1 = m_2 = m$ gilt $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}} \cdot U^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}} \cdot \underline{U^T U} \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2$ (18)

Die kinetische Energie ist durch (18) und die potentielle Energie durch (12) gegeben. Damit lautet die Lagrangefunktion

④

$$L = T - V = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \lambda_i q_i^2 \right] \quad (19)$$

Bewegungsgleichung durch $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ mit $j=1,2$

$$\Rightarrow m \ddot{q}_i = -\lambda_i q_i \text{ für } i=1,2 \Rightarrow \ddot{q}_i + \frac{\lambda_i}{m} q_i = 0 \quad (20)$$

$\Rightarrow$ System entkoppelter harmonischer Oszillatoren mit Frequenzen $\omega_i^2 = \frac{\lambda_i}{m}$ (21)

Allgemeine Lösung: $\underline{q_i = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)}, i=1,2$ (22)

Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten u_i durch

$$\underline{\vec{u} = U \vec{q}} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - q_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung $\underline{u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]}$ $\omega_1^2 = \frac{\lambda_1}{m}$ (24)

$\underline{u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]}$ $\omega_2^2 = \frac{\lambda_2}{m}$

$A_1, \varphi_1, \varphi_2$ sind Integrationskonstanten und werden durch Anfangsbedingungen bestimmt.

Kurzfragen

Siehe Vorlesung, Merkwörter und Tutorien....