Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 2

Besprechung: 02/05/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/˜shnirman

1. Doppel-Pendel

Wir beschreiben die Massenpunkte durch die Koordinaten $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ und $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. Erst formulieren wir die Zwangsbedingungen $F_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$.

$$F_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1|^2 - l_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 - l_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_2^2 = 0$$

Auf beide Massen wirkt die Schwerkraft. Die Lagrange-Gleichungen erster Art lauten

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -m_1 g\vec{e}_z + \lambda_1 \nabla_{\vec{r}_1} F_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \lambda_2 \nabla_{\vec{r}_1} F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -m_2 g\vec{e}_z + \lambda_1 \nabla_{\vec{r}_2} F_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \lambda_2 \nabla_{\vec{r}_2} F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \tag{2}$$

Das ergibt

$$m_1\ddot{x}_1 = 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2(x_1 - x_2) \tag{3}$$

$$m_1\ddot{y}_1 = 2\lambda_1 y_1 + 2\lambda_2(y_1 - y_2) \tag{4}$$

$$m_1\ddot{z}_1 = -mg + 2\lambda_1 z_1 + 2\lambda_2(z_1 - z_2) \tag{5}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -2\lambda_2(x_1 - x_2) \tag{6}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = -2\lambda_2(y_1 - y_2) \tag{7}$$

$$m_2\ddot{z}_2 = -mg - 2\lambda_2(z_1 - z_2) \tag{8}$$

Zusammen mit den Zwangsbedingungen sind das 8 Gleichungen für 8 Variablen: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \lambda_1, \lambda_2$.

2. Massenpunkt auf einer Kugel

2a) Die Zwangsbedingung lautet $F(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + z^2} - R = 0$. Da die Zwangskraft senkrecht zu der Oberfläche $F(\vec{r}) = 0$ sein muss, sehen wir dass $\vec{Z} = \lambda\vec{e}_r$. Die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen erster Art) sind:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + \lambda\vec{e}_r \,, \tag{9}$$

$$r = R \,. \tag{10}$$

2b) Wir wollen $\ddot{\vec{r}}$ in Kugel-Koordinaten (mit $\phi = 0$) ausdrücken. Dann gilt $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$, und $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\vec{e}_z = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Dies ergibt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Die zweite Ableitung ergibt (mit $\dot{\vec{e}}_\theta = -\vec{e}_r\dot{\theta}$)

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Jetzt können wir Gl. (9) auf $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\theta$ projezieren. Die Projektion auf $\vec{e}_r$ ergibt

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mg\cos\theta + \lambda$$

Die Projektion auf $\vec{e}_\theta$ ergibt

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = mg\sin\theta$$

Zusätzlich gilt die Zwangsbedingung $r = R$ und daher $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Dies ergibt

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + \lambda\,, \tag{11}$$

$$mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta\,. \tag{12}$$

Wir multiplizieren Gl. (12) mit $\dot{\theta}$ und integrieren. Das ergibt

$$(1/2)mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + c_0$$

Die Konstante c_0 wird durch die Anfangsbedingungen gefunden. Da am Anfang $\dot{\theta} = 0$, haben wir $c_0 = mg\cos\theta_0$. Einsetzen in Gl. (11) liefert

$$mR\dot{\theta}^2 = -2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) = mg\cos\theta - \lambda$$

und schließlich

$$3\cos\theta = 2\cos\theta_0 + \frac{\lambda}{mg}$$

Das ergibt θ als Funktion von θ_0 und λ. Beachten Sie, dass die Zwangskraft λ eine zeitabhängige Grösse ist.

2c) Ab dem Zeitpunkt, zu dem der Massenpunkt die Kugel verlässt, bewegt sich der Massenpunkt frei. Deshalb wirkt auf den Massenpunkt keine Zwangskraft mehr. Das bedeutet, dass dieser Zeitpunkt durch $\lambda = 0$ bestimmt wird. Dann finden wir

$$3\cos\theta_c = 2\cos\theta_0$$

Da θ_0 klein ist, gilt $\cos\theta_0 \approx 1$ und $\cos\theta_c \approx 2/3$. Oder genauer: $\cos\theta_0 \approx 1 - \theta_0^2/2$ und $\cos\theta_c \approx 2/3 - \theta_0^2/3$.

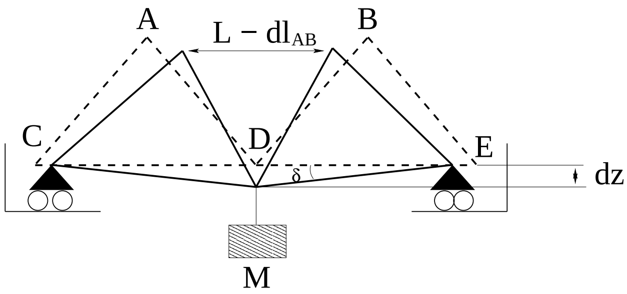

FIG. 1: Die Verformung.

3. Zwangskräfte in einer Brücke

Wir beschreiben die Position des Gestänges durch einen 5×3 dimensionalen Vektor $\vec{x} = \{\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D, \vec{r}_E\}$ und führen den Impuls $\vec{p} = \{\vec{p}_A, \vec{p}_B, \vec{p}_C, \vec{p}_D, \vec{p}_E\}$ ein. Die Lagrange-Gleichungen erster Art lauten dann

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla U(\vec{x}) + \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla F_\alpha(\vec{x})$$

$$F_\alpha(\vec{x}) = 0$$

wobei α alle s=7 Zwangsbedingungen zählt ($\alpha = AB, AC, AD, BD, BE, CD, DE$). Es gilt, z.B., $F_{AB} = l_{AB} - L$, wobei $l_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$. Im Gleichgewicht gilt $\dot{\vec{p}} = 0$ und

$$\nabla U(\vec{x}) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla F_\alpha(\vec{x})$$

Wir projezieren diese Gleichung auf die Verformung $d\vec{x}_{AB}$, die die Zwangsbedingung F_{AB}, und nur die, verletzt

$$\nabla U(\vec{x}) d\vec{x}_{AB} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla F_\alpha(\vec{x}) d\vec{x}_{AB}$$

Die Verformung ist in Fig. (1) gezeigt. (Um alle anderen Zwangsbedingungen nicht zu verletzen, müssen wir erlauben, dass sich die Punkte C und E bewegen. Allerdings ist die Verletzung der Zwangsbedingungen F_{CD} und F_{DE} nur ein Effekt höherer Ordnung.) Es ist jetzt klar, dass die linke Seite gerade die Änderung der potenziellen Energie bei der Verformung ist. Sie kann wie folgt ausgedrückt werden

$$\nabla U(\vec{x}) d\vec{x}_{AB} = Mgdz \ .$$

Hierbei ist dz die senkrechte Auslenkung der Masse (des Punktes D). Es ist auch klar, dass aufgrund der Änderung $d\vec{x}_{AB}$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \vec{\nabla}_{\vec{x}} F_\alpha(\vec{x}) d\vec{x}_{AB} = \lambda_{AB} dl_{AB}$$

Dann gilt

$$\lambda_{AB} dl_{AB} = Mgdz$$

und

$$\lambda_{AB} = Mg \frac{dz}{dl_{AB}}$$

Wir parametrisieren die Verformung durch den Winkel δ. Damit gilt $dz = L\sin\delta \approx L\delta$ und $L - dl_{AB} = 2L\sin(\pi/6 - \delta) = 2L\sin(\pi/6) - 2L\cos(\pi/6)\delta$. Dann $dl_{AB} = L\sqrt{3}\delta$ und $dz/dl_{AB} = 1/\sqrt{3}$. Die gesuchte Zwangskraft ist

$$|Z_{AB}| = \lambda_{AB} = Mg/\sqrt{3}\ .$$