Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 3

Besprechung: 09/05/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

1) Pendel mit bewegter Aufhängung

Wir benutzen $x = x_s(t) + l\sin\theta$ und $z = -l\cos\theta$. Für die kinetische Energie gilt

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + 2\dot{x}_s l\cos\theta\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2)$$

Die potenzielle Energie ist

$$U = mgz = -mgl\cos\theta$$

Die Lagrange-Funktion dann lautet

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + 2\dot{x}_s l\cos\theta\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta}$$

Das ergibt

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_s l\cos\theta + ml^2\dot{\theta}\right) = -m\dot{x}_s l\sin\theta\dot{\theta} - mgl\sin\theta$$

und schließlich

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \cos\theta\ddot{x}_s$$

2) Das Doppelpendel

Wir haben $x_1 = l\sin\phi_1$, $z_1 = -l\cos\phi_1$, $x_2 = x_1 + l\sin\phi_2$, und $z_2 = z_1 - l\cos\phi_2$. Dann gilt

$$\dot{x}_1 = l\dot{\phi}_1\cos\phi_1$$

$$\dot{z}_1 = l\dot{\phi}_1\sin\phi_1$$

$$\dot{x}_2 = l\dot{\phi}_1\cos\phi_1 + l\dot{\phi}_2\cos\phi_2$$

$$\dot{z}_2 = l\dot{\phi}_1\sin\phi_1 + l\dot{\phi}_2\sin\phi_2$$

Die kinetische Energie dann lautet

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\left(\dot{\phi}_2^2 + 2\cos(\phi_1 - \phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right)$$

wobei wir $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$ benutzt haben.

Die potenzielle Energie lautet

$$U = g(m_1 z_1 + m_2 z_2) = -(m_1+m_2) g l \cos\phi_1 - m_2 g l \cos\phi_2$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L(\phi_1, \phi_2, \dot\phi_1, \dot\phi_2) = T - U$$

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art lauten $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi_1} = \frac{\partial L}{\partial \phi_1}$ und $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi_2} = \frac{\partial L}{\partial \phi_2}$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \ddot\phi_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left[\dot\phi_2^2 \sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot\phi_2 \cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l}\sin\phi_1 &= 0 \qquad (1) \\ \ddot\phi_2 + \left[-\dot\phi_1^2 \sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot\phi_1 \cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l}\sin\phi_2 &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

2b)

Für kleine Schwingungen $\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$ können die Gleichungen (1) und (2) linearisiert werden. Das bedeutet, dass wir die folgenden Näherungen benutzen: $\sin\phi_1 \approx \phi_1$, $\sin\phi_2 \approx \phi_2$, $\cos\phi_1 \approx 1$, $\cos\phi_2 \approx 1$. Dann gilt auch $\sin(\phi_1-\phi_2) \approx \phi_1 - \phi_2$ und $\cos(\phi_1-\phi_2) \approx 1$.
Das führt zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot\phi_1 + \tfrac{m_2}{m_1+m_2}\ddot\phi_2 + \frac{g}{l}\phi_1 &= 0 \qquad (3) \\ \ddot\phi_2 + \ddot\phi_1 + \frac{g}{l}\phi_2 &= 0\,. \qquad (4) \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen zu lösen, benutzen wir den Ansatz

$$\phi_1 = a_1 e^{i\omega t}, \qquad \phi_2 = a_2 e^{i\omega t}, \qquad (5)$$

wobei ω eine Frequenz ist, die wir bestimmen wollen. Wir setzen den Ansatz in Gl. (3) und (4) ein. Dann eliminieren wir a_1 durch

$$a_1 = \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\frac{a_2}{\omega_2}\ ,$$

und zeigen, dass ω durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{g}{l} - \omega^2\right]^2 - \frac{m_2\,\omega^2}{m_1+m_2} = 0\,. \qquad (6)$$

Die Lösungen dieser Gleichung lauten

$$\omega_\pm^2 = \frac{g/l}{1 \mp \sqrt{m_2/(m_1+m_2)}} \qquad (7)$$

Für $m_1 \gg m_2$ gilt

$$\omega_\pm^2 \approx g/l$$

Das bedeutet, dass die Masse m_1 fast ruhig ist, und die Masse m_2 oscilliert mit der üblichen Frequenz $\sqrt{g/l}$.

Für $m_1 \ll m_2$ gilt
$$\omega_-^2 \approx g/(2l)$$
und
$$\omega_+^2 \approx (2g/l)(m_2/m_1)$$
Die erste Mode (ω_-) entspricht einem Pendel der Länge $2l$. Für diese Mode gilt $a_2 \approx a_1$, d.h., dass das Doppelpendel sich wie ein einzelnes Pendel der Länge $2l$ bewegt. Für die zweite Mode gilt $a_2 \approx -a_1$. Das bedeutet, dass die Masse m_2 ungefähr in Ruhe ist und m_1 schwingt.

3) Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens.

Die Bewegungsgleichung lautet
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \tag{8}$$
Erst berechnen wir die linke Seite der Gl. (8):
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}$$
Dann
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\ddot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla\right)\vec{A}$$
wobei im letzen Term das Differenzialoperator ∇ nur auf $\vec{A}$ wirkt. Jetzt berechnen wir die rechte Seite der Gl. (8):
$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q\nabla\phi + \frac{q}{c}\nabla(\dot{\vec{r}}\vec{A})$$
wobei im letzen Term das Differenzialoperator ∇ nur auf $\vec{A}$ wirkt. Das ergibt
$$m\ddot{\vec{r}} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\left(\nabla(\dot{\vec{r}}\vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla)\vec{A}\right)$$
Wir benutzen jetzt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ wobei $\vec{a} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{b} = \nabla$, und $\vec{c} = \vec{A}$. Schließlich
$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$