Theoretische Physik B, SS 2005

Musterlösung zum Übungsblatt 4

Besprechung: 23/05/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

1) Sphärisches Pendel

1a) Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \ .$$

Für die potenzielle Energie gilt

$$U = mgz \ .$$

Wir drücken T und U in Polar-Koordinaten aus. Dazu benötigen wir ($\dot{r} = 0$)

$$\dot{x} = r\cos\theta\cos\phi\,\dot{\theta} - r\sin\theta\sin\phi\,\dot{\phi} \tag{1}$$
$$\dot{y} = r\cos\theta\,\sin\phi\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\phi\,\dot{\phi} \tag{2}$$
$$\dot{z} = -r\sin\theta\,\dot{\theta} \tag{3}$$

Dann gilt ($r = l$)

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

und

$$U = mgl\,cos\theta$$

Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mgl\,cos\theta$$

Die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 2. Art) sind

$$ml^2\ddot{\theta} = ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta \tag{4}$$
$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0 \tag{5}$$

1b) Wir berechnen jetzt die z-Projektion des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

$$L_z = xp_y - yp_x = mx\dot{y} - my\dot{x} = ml^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

wobei Gl. (1) und Gl. (2) benutzt wurden. Die zweite Bewegungsgleichung Gl. (5) bedeutet, also, dass L_z erhalten ist, $L_z = const$. Dann können wir $\dot{\phi}$ eliminieren:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{ml^2\sin^2\theta}$$

Wir setzen dies in die Gl. (4) ein. Das ergibt

$$ml^2\ddot{\theta} - \frac{L_z^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\sin\theta = 0$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\dot{\theta}$. Das ergibt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{ml^2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta\right) = 0$$

Also sehen wir dass die Größe

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{ml^2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

erhalten ist. Das ist die Energie. Das folgt auch aus $E = T + U$ und $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{ml^2\sin^2\theta}$.
1c) Jetzt können wir die Energie in der Form $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$ schreiben, wobei

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{ml^2\sin^2\theta} + mgl\cos\theta\ .$$

Diese Funktion ist in Abb. 1 skizziert. Die Funktion hat ein Minimum für $\theta = \theta_c(L_z)$ und dies ist die Lösung der Bewegungsgleichungen in der keine Bewegung in die θ-Richtung statt findet. Das Pendel dreht mit $\theta = \theta_c = const.$ und $\dot{\phi} = \frac{L_z}{ml^2\sin^2\theta_c} = const.$ um.

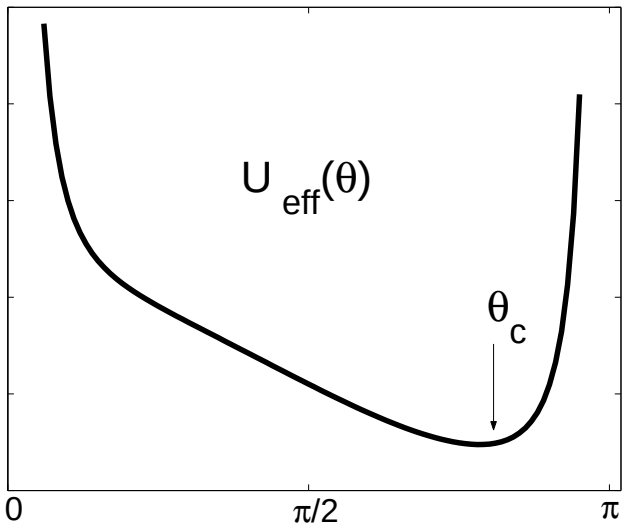

Abbildung 1: $U_{\text{eff}}(\theta)$.

2. Das relativistische Teilchen
Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} - U(\vec{r})$$

Die Energie ist

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\,\dot{\vec{r}} - L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + U(\vec{r}) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} + U(\vec{r})$$

Wenn $|\dot{\vec{r}}| \ll c$ ergibt das

$$E \approx mc^2 + \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r})$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Das ergibt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

3. Der Lenzsche Vektor

(3a) Die Lagrange-Funktion lautet $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \alpha/r$. Die Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^3} \tag{6}$$

Jetzt berechnen wir $\dot{\vec{V}}_{Lenz}$

$$\dot{\vec{V}}_{Lenz} = \dot{\vec{p}}\times\vec{L} - \frac{m\alpha\,\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{m\alpha(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r}}{r^3} = \dot{\vec{p}}\times\vec{L} + \frac{m\alpha}{r^3}\left[\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\right]$$

wobei wir $\dot{\vec{L}} = 0$ und $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}) = \vec{y}(\vec{x}\cdot\vec{z}) - \vec{z}(\vec{x}\cdot\vec{y})$ benutzt haben. Wir setzen $\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}}$ ein und benutzen Gl. (6). Das ergibt

$$\dot{\vec{V}}_{Lenz} = -\frac{\alpha}{r^3}\,\vec{r}\times\vec{L} + \frac{m\alpha}{r^3}\left[\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\right] = 0$$

(3b) Da die Ebene der Bahn senkrecht zu $\vec{L}$ liegt gilt

$$\vec{V}_{Lenz}\cdot\vec{L} = (\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{L} - \frac{m\alpha}{r}\vec{r}\cdot\vec{L} = 0$$

Jetzt berechnen wir $\vec{V}_{Lenz}\cdot\vec{r} = r\,V_{Lenz}\,\cos\theta$

$$\vec{V}_{Lenz}\cdot\vec{r} = (\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{r} - m\alpha r = (\vec{r}\times\vec{p})\cdot\vec{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r$$

Dann für die Bahnkurve gilt

$$r(\theta) = \frac{L^2}{m\alpha + V_{Lenz}\cos\theta}$$

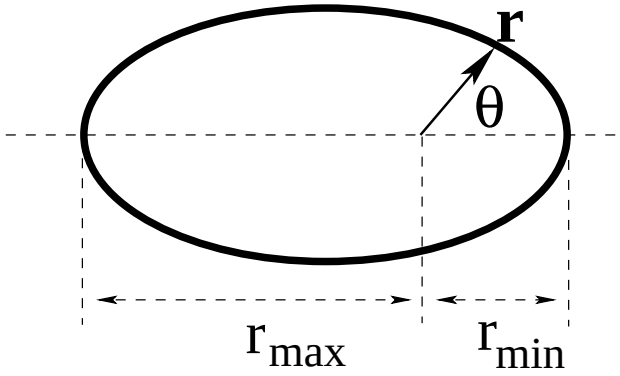

Abbildung 2: Die Bahnkurve für den Fall $V_{Lenz} < m\alpha$. Es gilt $r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha + V_{Lenz}}$ und $r_{\max} = \frac{L^2}{m\alpha - V_{Lenz}}$.

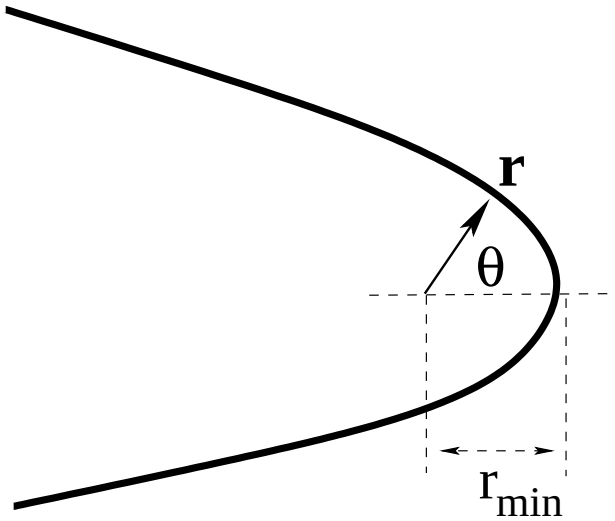

Abbildung 3: Die Bahnkurve für den Fall $V_{Lenz} > m\alpha$. Es gilt $r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha + V_{Lenz}}$.

Die Bahnkurve für den Fall $V_{Lenz} < m\alpha$ ist in Abb. 2 skizziert. Es gilt $r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha + V_{Lenz}}$ und $r_{\max} = \frac{L^2}{m\alpha - V_{Lenz}}$. Die Bahnkurve für den Fall $V_{Lenz} > m\alpha$ ist in Abb. 3 skizziert. Es gilt $r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha + V_{Lenz}}$.

(3c)*
i) Es gilt

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\,\delta\vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\,\delta\dot{\vec{r}}$$

Wir setzen die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$$

ein. Das ergibt

$$\delta L = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\delta\vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\delta\vec{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\vec{\psi}\right)\epsilon$$

Es wurde angenohmen, dass

$$\delta L = \frac{d}{dt}\xi(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\epsilon$$

Dann

$$\delta L - \delta L = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\vec{\psi} - \xi\right)\epsilon = \dot{I}\,\epsilon = 0$$

Also $\dot{I} = 0$, d.h., I ist erhalten.

ii) Wir berechnen δL für $\delta\vec{r} = \vec{\psi}\,\epsilon$ und $\vec{\psi} = (\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\vec{r}$. Das ergibt

$$\delta L = m\,\ddot{\vec{r}}\delta\dot{\vec{r}} - \frac{\alpha\,\vec{r}\,\delta\vec{r}}{r^3}$$

Da $\vec{\psi}$ senkrecht zu $\vec{r}$ ist gilt $\vec{r}\,\delta\vec{r} = 0$. Dann gilt

$$\delta L = m\,\ddot{\vec{r}}\delta\dot{\vec{r}} = m\,\ddot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{b}\times\ddot{\vec{r}})\times\vec{r}\right]\cdot\epsilon + m\,\ddot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}\right]\cdot\epsilon = m\,\ddot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{b}\times\ddot{\vec{r}})\times\vec{r}\right]\cdot\epsilon$$

Wir setzen jetzt Gl. (6) ein. Dass ergibt

$$\delta L = -\frac{\alpha}{r^3}\,\dot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{b}\times\vec{r})\times\vec{r}\right]\cdot\epsilon = -\frac{\alpha}{r^3}\,\dot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{b}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{b}\right]\cdot\epsilon = \frac{d}{dt}\xi(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\epsilon$$

wobei $\xi = \alpha\vec{b}\cdot\vec{r}/r$. Also die erhaltene Größe lautet

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\vec{\psi} - \xi = m\dot{\vec{r}}\cdot\left[(\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\vec{r}\right] - \frac{\alpha\vec{b}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{1}{m}(\vec{b}\times\vec{p})\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) - \frac{\alpha\vec{b}\cdot\vec{r}}{r} =$$

$$= \frac{1}{m}(\vec{b}\times\vec{p})\cdot\vec{L} - \frac{\alpha\vec{b}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{1}{m}(\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{b} - \frac{\alpha\vec{b}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{1}{m}\,\vec{V}_{Lenz}\cdot\vec{b}$$

Da $\vec{b}$ beliebig war, ist $\vec{V}_{Lenz}$ erhalten.