Theoretische Physik B, SS 2005

Übungsblatt 5

Besprechung: 30/05/2005

Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Alexander Shnirman (11/03, Tel.: 608-6030)
http://www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/~shnirman

1. Hamilton-Gleichungen in Polarkoordinaten (6 Punkte)
Ein Teilchen bewegt sich in einer Ebene in einem Zentralpotenzial. Wie wir schon gezeigt haben lautet die Lagrange-Funktion in Polarkoordinaten $L(\rho,\phi,\dot\rho,\dot\phi) = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\phi^2)-U(\rho)$.
(1a) (3 Punkte) Finden Sie die kanonischen Impulse p_ρ und p_ϕ. Was ist die Hamilton-Funktion $H(\rho,\phi,p_\rho,p_\phi)$?
(1b) (3 Punkte) Finden Sie $\dot\rho$, $\dot\phi$, $\dot p_\rho$ und $\dot p_\phi$ mittels der Hamilton-Gleichungen, und interpretieren Sie jede Gleichung.

2. Hamilton-Gleichung eines geladenen Teilchens (8 Punkte)
Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens (Ladung q) im elektrischen ($\vec E$) und magnetischen ($\vec B$) Feld ist

$$L(\vec r,\dot{\vec r},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 - q\,\phi(\vec r,t) + \frac{q}{c}\,\dot{\vec r}\,\vec A(\vec r,t)$$

Dabei ist ϕ das elektrische Potenzial und $\vec A$ das so genannte Vektorpotenzial. Daraus ergeben sich $\vec E$ und $\vec B$ aus:

$$\vec E = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec A$$

$$\vec B = \nabla\times\vec A$$

(2a) (4 Punkte) Finden Sie den kanonischen Impuls $\vec p$? Drücken Sie $\dot{\vec r}$ durch $\vec p$ aus. Geben Sie die Hamilton-Funktion des Teilchens an.
(2b) (4 Punkte) Finden Sie die Hamilton-Gleichungen für $\dot{\vec p}$ und $\dot{\vec r}$. Finden Sie hieraus eine Gleichung für $\ddot{\vec r}$. Zeigen Sie, dass diese mit der Bewegungsgleichung von Übungsblatt 3 Aufgabe 3 identisch ist:

$$m\ddot{\vec r} = q\left(\vec E + \frac{1}{c}\,\dot{\vec r}\times\vec B\right)$$

3. Hamilton-Funktion des Doppelpendels (6 Punkte)
Betrachten Sie ein ebenes Doppelpendel, das aus zwei unterschiedlichen Massen m_1, m_2 besteht (Wir haben das System schon in Übungsblatt 3 Aufgabe 2 betrachtet). Die Massen sind miteinander und mit einem Aufhängepunkt durch zwei masselose Stäbe der Länge l verbunden (siehe Abb. 1). Die Massen können sich nur in der x-z Ebene bewegen. Als unabhängige Koordinaten wählen wir die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 (siehe Abb. 1).
(3a) (3 Punkte) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\phi_1,\phi_2,\dot\phi_1,\dot\phi_2)$ an. Für kleine Schwingungen $\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$ vereinfachen Sie die Lagrange-Funktion, indem Sie in einer Entwicklung nach ϕ_1 und ϕ_2 nur Terme bis zur quadratischen Ordnung behalten, d.h. ϕ_1^2, ϕ_2^2, $\phi_1\phi_2$, $\dot\phi_1^2$, $\dot\phi_2^2$, $\dot\phi_1\dot\phi_2$. Bestimmen Sie die kanonische Impulse. Drücken Sie die Geschwindigkeiten durch die Impulse aus und finden Sie die Hamilton-Funktion.

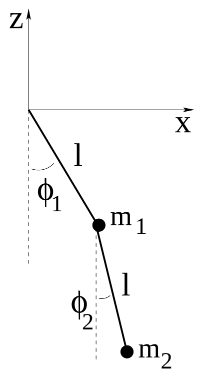

Abbildung 1: Das ebene Doppelpendel.

(3b) (3 Punkte) Führen Sie dieselbe Rechnung in einer Matrix-Formulierung aus. Schreiben Sie dazu zunächst die Lagrange-Funktion in der folgenden Form

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \hat{T} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} - U(\phi_1, \phi_2)$$

Bestimmen Sie die 2×2 Matrix $\hat{T}$. Zeigen Sie, dass die kanonische Impulse p_1 und p_2 dann durch

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, und die Hamilton-Funktion durch

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U(\phi_1, \phi_2) \ ,$$

wobei $\hat{T}^{-1}$ die inverse Matrix zu $\hat{T}$ ist, $\hat{T}^{-1}\hat{T} = 1$. Invertieren Sie $\hat{T}$ und schreiben Sie die Hamilton-Funktion aus.